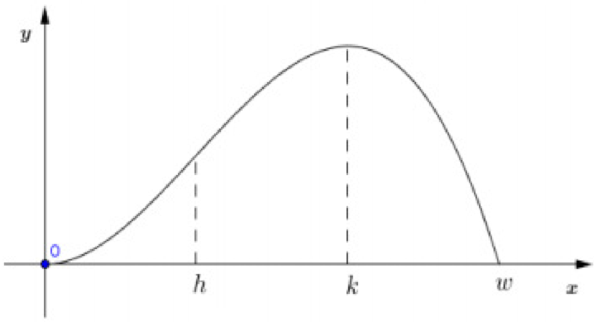
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - Corso di Ordinamento - 19 giugno 2014
a cura di L. Rossi

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0,\, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x=h$ e $x=k$.



1) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0,\, w]$ in tre parti uguali.
3) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w=3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.
4) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)\,g(x)\,dx$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

Soluzione del PROBLEMA 1

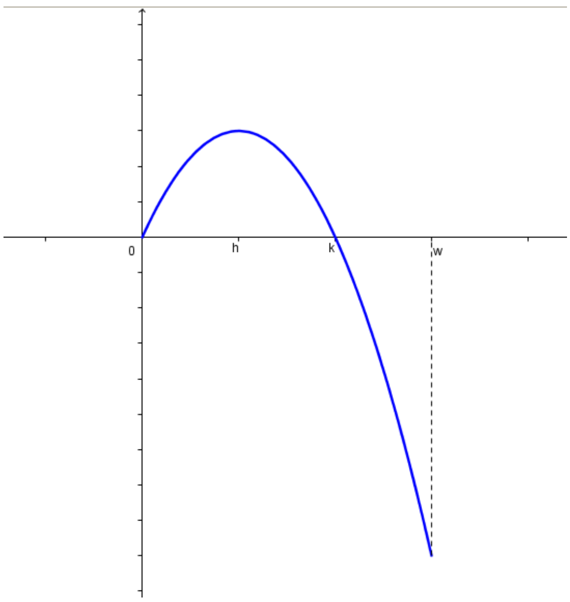
Punto 1

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha: $g'(x)=f(x)\ \forall x\in[0,w]$.

Dunque: $f(0)=g'(0)=0 \wedge f(w)=g'(w)=0$.

La funzione $y=f(x)$ presenta un massimo in $x=h$ dove risulta $f'(h)=g''(h)=0$ e presenta minimi (rispettivamente relativo e assoluto) agli estremi dell'intervallo $[0,w]$.

Il possibile grafico di $y=f(x)$ potrebbe essere:



Punto 2

Supposto $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, con $a,b,c,d\in R, a\neq 0$, devono sussistere le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(w)=0 \\ g'(0)=0 \\ g'(k)=0 \\ g''(h)=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} d=0 \\ aw^3+bw^2+cw=0 \\ c=0 \\ 3ak^2+2bk+c=0 \\ 6ah+2b=0 \end{cases}$$

svolgendo i calcoli si ottiene: $\begin{cases} d=0 \\ w=-\dfrac{b}{a} \\ c=0 \\ k=-\dfrac{2b}{3a} \\ h=-\dfrac{b}{3a} \end{cases}$

ossia i numeri *h* e *k* dividono l'intervallo $[0,w]$ in tre parti uguali.

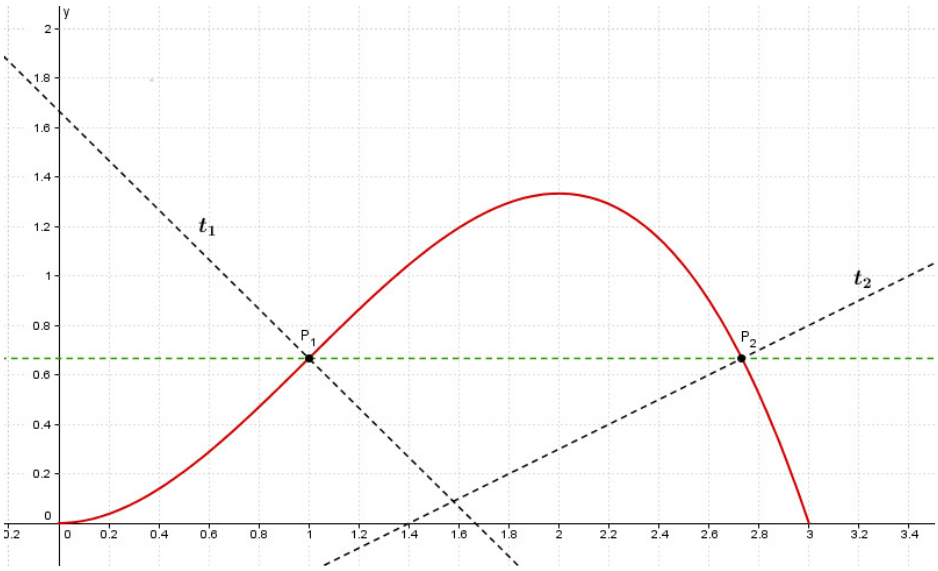
Punto 3

Dal punto precedente: $g(x)=ax^3+bx^2$, con $a,b\in R, a\neq 0$, devono sussistere le condizioni:

$\begin{cases} g(3)=0 \\ g(1)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ ossia: $\begin{cases} 27a+9b=0 \\ a+b=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ svolgendo i calcoli: $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$, perciò $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2$, $x\in[0,3]$.

I punti in cui la funzione $y = g(x)$ è tagliata dalla retta $y = \frac{2}{3}$ nell'intervallo $[0,3]$ si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad P_1\left(1, \frac{2}{3}\right),\ P_2\left(1+\sqrt{3}, \frac{2}{3}\right).$$



Le nomali a Γ in tali punti hanno equazione:

$$t_1 : y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{g'(1)}(x-1)$$

$$t_2 : y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{g'\left(1+\sqrt{3}\right)}\left(x-1-\sqrt{3}\right)$$

Facendo i calcoli si ottiene:

$$g'(1) = 1 \rightarrow t_1 : y - \frac{2}{3} = -(x-1) \rightarrow t_1 : y = -x + \frac{5}{3}$$

$$g'\left(1+\sqrt{3}\right) = -2 \rightarrow t_2 : y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x-1-\sqrt{3}\right) \rightarrow t_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1-3\sqrt{3}}{6}.$$

Punto 4

Il volume di W si può ottenere calcolando l'integrale $\int_0^3 2\pi x\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx$ utilizzando il "metodo dei gusci cilindrici". Calcolando l'integrale si ha:

$$2\pi\int_0^3 x\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx = 2\pi\left[-\frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = 2\pi\left(-\frac{81}{5} + \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{10}\pi \cong 25,45\, l.$$

Giudizio

Livello di difficoltà:	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto		
È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?	☒ Si’	☐ No	☐ Non si sa		
Normalmente viene svolto?	☒ Si’	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Formulazione:	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☒ Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?	☒ Si’	☐ No			