

Soluzione del QUESTIONARIO

QUESITO 9

9. Le lettere N, Z, Q, R denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo \aleph_0 (*aleph-zero*) indica la cardinalità di N. Gli insiemi Z, Q e R hanno anch'essi cardinalità \aleph_0 ? Si motivi la risposta.

Questo quesito sembra più adatto ad una prova orale che a una prova scritta.

Riguarda il confronto tra insiemi infiniti.

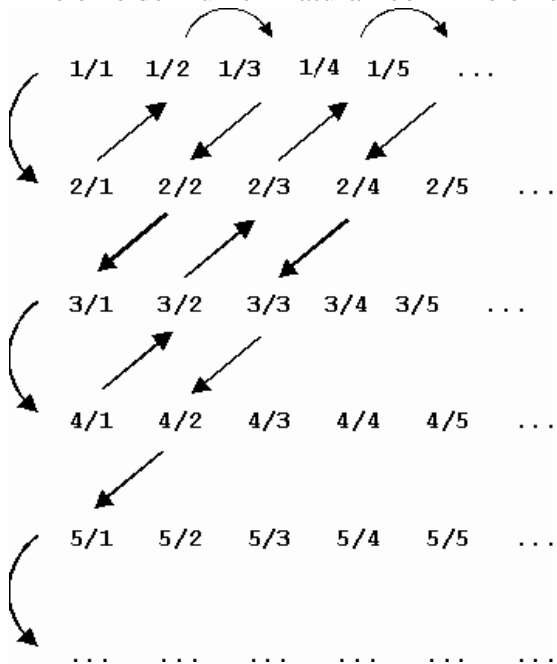
L'insieme Z dei numeri interi ha la stessa cardinalità di N. Per dimostrarlo basta "elencare" i numeri interi nel seguente modo:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

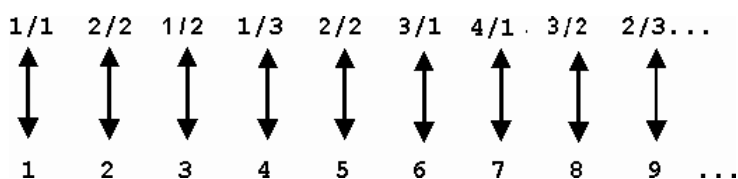
facendo seguire al numero n il suo opposto. In questo modo, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra N e l'insieme Z:

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2, a_5 = 3, a_6 = -3, \dots$

G. Cantor ha dimostrato che l'insieme Q è numerabile, cioè ha la stessa cardinalità dei naturali. La figura seguente indica il procedimento usato da Cantor per porre in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri naturali con l'insieme dei razionali assoluti.



Si ottiene:



L'insieme di numeri reali \mathbb{R} ha invece la cardinalità del continuo, che è maggiore di quella del numerabile.

Per dimostrarlo ci si può limitare a ragionare, per assurdo, sull'intervallo aperto $(0,1)$. Si suppone che i numeri reali compresi tra 0 e 1 formino un insieme numerabile. In questo caso è possibile "elencarli" come nella seguente figura.

1	↔	0,	a1	a2	a3	a4	a5	a6	.	.	.
2	↔	0,	b1	b2	b3	b4	b5	b6	.	.	.
3	↔	0,	c1	c2	c3	c4	c5	c6	.	.	.
4	↔	0,	d1	d2	d3	d4	d5	d6	.	.	.
5	↔	0,	e1	e2	e3	e4	e5	e6	.	.	.
6	↔	0,	f1	f2	f3	f4	f5	f6	.	.	.
.....		

A partire da questa successione di numeri, si può costruire un nuovo numero:

$x = 0, a b c d e f \dots$

scegliendo la cifra "a" diversa dalla cifra "a1", la cifra "b" diversa dalla cifra "b2", la cifra "c" diversa dalla cifra "c3",

Si ottiene in questo un numero x compreso tra 0 e 1, che non è tra quelli "elencati" in precedenza, da cui l'assurdo.

Giudizio

Livello di difficoltà:	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto		
È in programma nel liceo scientifico PNI?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non si sa		
Normalmente viene svolto?	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	<input type="checkbox"/> Mai	<input checked="" type="checkbox"/> Non sempre	<input type="checkbox"/> Sempre		
Formulazione:	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/competenze fondamentali?	<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Sì		