

Problema 1

Soluzione a cura di Laura Rossi

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettare uno che risponda alle esigenze del condominio.

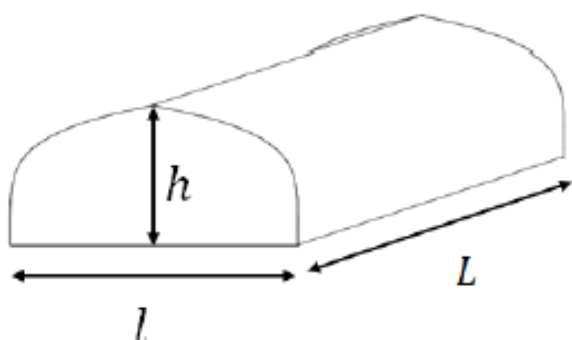


Figura 1

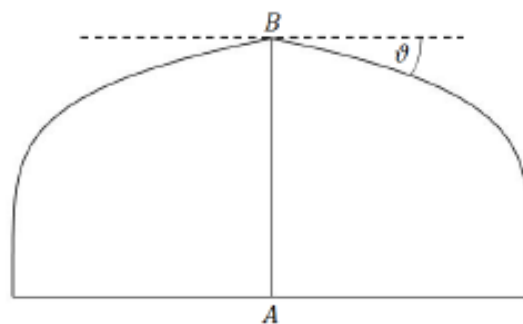


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10^\circ$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3 , in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegna il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Soluzione

Punto 1

La famiglia di funzioni che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$ è

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

Escludo infatti $f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$ poiché $f(1) = 0$ per $k = 1$ (l'unica funzione della famiglia passante per $(1, 0)$ corrisponde a tale valore di k) e la funzione corrispondente

$f(x) = -6|x|^3 + 9x^2 - 4|x| + 1$ per $0 \leq x \leq 1$ non è decrescente come invece previsto dal modello: infatti $f'(x) = -18x^2 + 18x - 4$ il cui segno è:

$$f'(x) > 0: \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

$$f'(x) < 0: 0 < x < \frac{1}{3} \vee \frac{2}{3} < x < 1$$

quindi $y = f(x)$ è decrescente da 0 a $\frac{1}{3}$ poi crescente da $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ e infine decrescente da $\frac{2}{3}$ a 1.

Escludo anche $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ poiché è derivabile in $x = 0$.

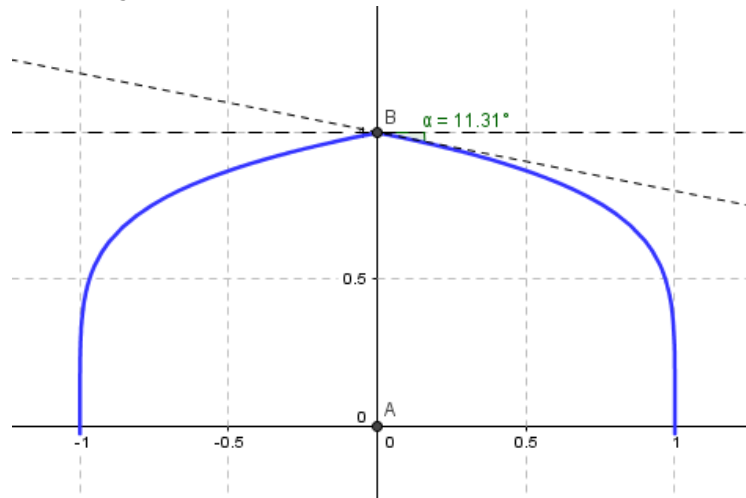
Punto 2

Si trova che il valore richiesto è $k = 5$ come di seguito spiegato.

Studio la funzione $f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{5}}$ con $0 \leq x \leq 1$ ossia $f(x) = (1 - x)^{\frac{1}{5}}$ con $0 \leq x \leq 1$.

$$f'(x) = -\frac{1}{5}(1-x)^{-\frac{4}{5}}$$

La derivata destra in 0 ha valore: $f'_+(0) = -\frac{1}{5}$, quindi l'angolo in figura tra la tangente destra in 0 e l'orizzontale ha valore $\arctan \frac{1}{5} \sim 11,3^\circ \geq 10^\circ$.



Inoltre la capacità del serbatoio ha valore: $8 \cdot 2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{40}{3} > 13m^3$.

Il valore $k = 6$ non fa rispettare la condizione relativa all'angolo, poiché la derivata destra in 0 ha valore: $f'_+(0) = -\frac{1}{6}$, quindi l'analogo dell'angolo in figura tra la tangente destra in 0 e l'orizzontale avrebbe valore $\arctan \frac{1}{6} \sim 9,5^\circ < 10^\circ$.

Il valore $k = 4$ pur facendo rispettare la condizione relativa all'angolo (poiché la derivata destra in 0 ha valore: $f'_+(0) = -\frac{1}{4}$, quindi l'analogo dell'angolo in figura tra la tangente destra in 0 e l'orizzontale avrebbe valore $\arctan \frac{1}{4} \sim 14^\circ \geq 10^\circ$), non fa rispettare la condizione relativa alla capacità, infatti:

$$8 \cdot 2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{4}} dx = 12,8 < 13m^3.$$

In modo del tutto analogo si verifica che nessun valore intero positivo di $k < 4 \vee k > 6$ può soddisfare la richiesta.

Punto 3

Considero la funzione $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{5}}$ con $0 \leq x \leq 1$ e la esprimo nella forma $f(y) = 1 - y^5$ con $0 \leq y \leq 1$.

Il volume di gasolio contenuto nel serbatoio in funzione del livello è espresso da:

$$\text{Volume} = 8 \cdot 2 \cdot \int_0^z (1-y^5) dy = 16 \left(z - \frac{z^6}{6} \right) \text{ con } 0 \leq z \leq 1.$$

Dunque la percentuale di riempimento sarà:

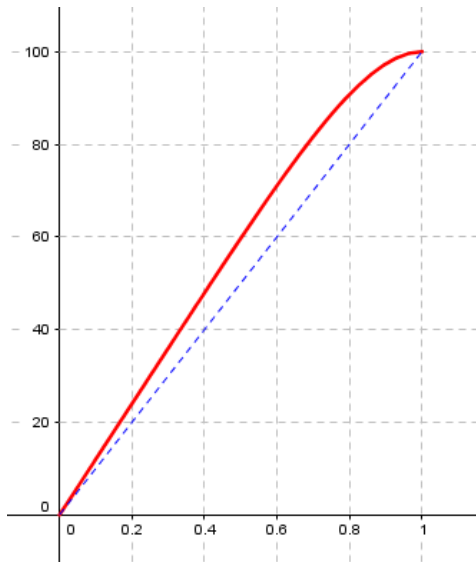
$$V(z) = \frac{16 \left(z - \frac{z^6}{6} \right)}{\frac{40}{3}} \cdot 100\% = \frac{6}{5} \left(z - \frac{z^6}{6} \right) \cdot 100\%.$$

Ad esempio se $z = 0,5m$ si ottiene $V(z) \sim 59,7\%$.

Punto 4

$V(z)$ non è direttamente proporzionale a z perché la funzione $V(z)$ non è lineare. Tuttavia per valori di z molto piccoli (vicini a 0), l'andamento è quasi lineare essendo z^6 trascurabile rispetto a z , tuttavia il fattore di proporzionalità è diverso da 1.

In figura l'andamento in rosso della funzione $y = V(z)$ con $0 \leq z \leq 1$ a confronto con la funzione $y = 100z$ con $0 \leq z \leq 1$ (la funzione si calcola facendo $y = \frac{100 \cdot z \text{ in metri}}{1 \text{ metro}}$ quindi restituisce un numero puro)



Usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento commetto un errore assoluto pari a:

$$f(z) = 100 \left[\frac{6}{5} \left(z - \frac{z^6}{6} \right) - z \right] = 20(z - z^6) \text{ con } 0 \leq z \leq 1.$$

$$f'(z) = 20(1 - 6z^5)$$

Studio il segno e trovo che f assume valore massimo in $z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ (quindi circa 0,7m); l'errore massimo

compiuto nella stima è $f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) \sim 11,6\%$ (ossia con z circa 0,7m il serbatoio contiene circa $10,9 \text{ m}^3$ di gasolio mentre l'amministratore stimerebbe circa $9,3 \text{ m}^3$ commettendo un errore assoluto di circa $1,6 \text{ m}^3$ corrispondente a circa l'11,6%).

Giudizio sul problema 1

Livello di difficoltà:	<input type="checkbox"/> Basso		<input type="checkbox"/> Medio		<input checked="" type="checkbox"/> Alto	
Si tratta di un problema contestualizzato	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> In modo forzato	<input checked="" type="checkbox"/> In modo accettabile		<input type="checkbox"/> Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato/Non è chiaro	
Di solito, viene svolto?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo?	<input type="checkbox"/> Mai		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre	
Formulazione:	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input checked="" type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara		<input type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
Verifica conoscenze/abilità/	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No	

competenze fondamentali?			
-----------------------------	--	--	--