Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 23 giugno 2016

Questionario

<u>Quesito 2</u>

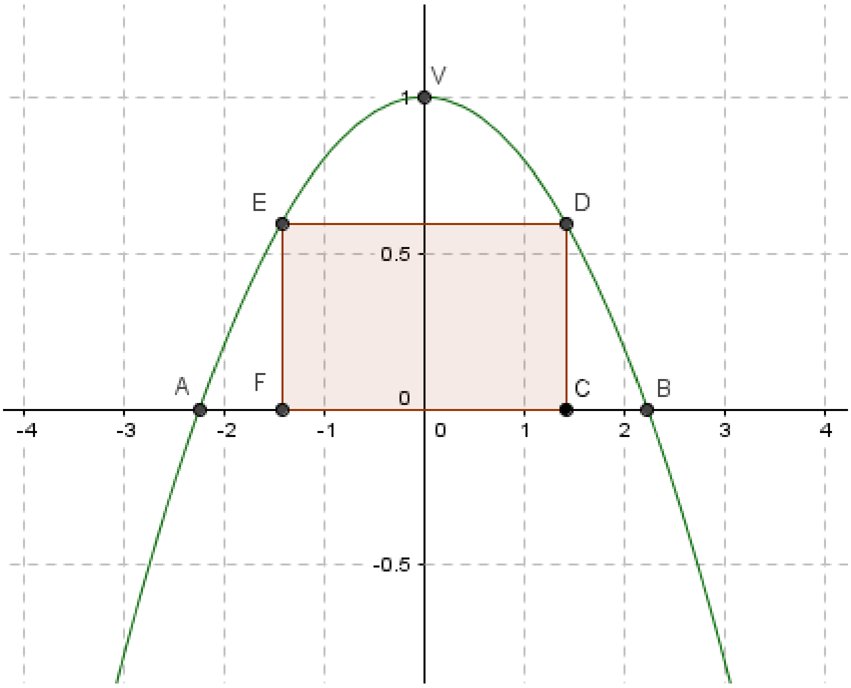
Soluzione a cura di Laura Rossi

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \qquad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

La funzione $y = 1 - ax^2$ con $a > 0$ è una parabola con vertice $V(0,1)$ e la concavità rivolta verso il basso che interseca l'asse delle ascisse in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$.
Il rettangolo inscritto ha vertici di coordinate: $C(k,0), D(k, 1-ak^2), E(-k, 1-ak^2), F(-k,0)$ con $0 < k < \frac{1}{\sqrt{a}}$.



L'area del rettangolo è espressa dalla funzione:
$S(k) = 2k(1 - ak^2)$ con $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$
Tale area è massima per $k = \frac{1}{\sqrt{3a}}$ e vale $\frac{4}{3\sqrt{3a}}$ infatti:
$S'(k) = 2 - 6ak^2, S'(k) > 0$ per $0 < k < \frac{1}{\sqrt{3a}}$ e $S'(k) < 0$ per $\frac{1}{\sqrt{3a}} < k < \frac{\sqrt{a}}{a}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}\ \forall a > 0\right)$
Il perimetro del rettangolo è espresso dalla funzione:
$P(k) = 2(2k + 1 - ak^2)$ con $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$
Tale perimetro è massimo per $k = \frac{1}{a}$ e vale $2 + \frac{2}{a}$ se $a > 1$ infatti:
$P'(k) = 2(2 - 2ak), P'(k) > 0$ per $0 < k < \frac{1}{a}$ e $S'(k) < 0$ per $\frac{1}{a} < k < \frac{1}{\sqrt{a}}$ $\left(\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}\ \forall a > 1\right)$
Il perimetro è massimo per $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ se $0 < a \leq 1$.

Per $a > 1$ il rettangolo di area massima è anche quello di perimetro massimo se $\frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{a}$ ossia $a = 3$ (soluzione accettabile poiché $a > 1$).
Per $0 < a \leq 1$ il rettangolo di area massima è anche quello di perimetro massimo se $\frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ossia $a = 3$ (soluzione non accettabile poiché non appartenente all'intervallo $0 < a \leq 1$).
Quindi se $a > 1$ vi è un caso in cui il rettangolo di area massima è anche quello di perimetro massimo.
Se $0 < a \leq 1$ il rettangolo di area massima non è anche quello di perimetro massimo.

Giudizio sul quesito

<table>
<tr><td>Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td colspan="2">☒ Medio</td><td colspan="2">☐ Alto</td></tr>
<tr><td>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non è esplicitato/Non è chiaro</td></tr>
<tr><td>Di solito, viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td>È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td><td colspan="2">☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione</td><td>☐ Scorretta</td><td colspan="2">☐ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td>☒ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td>Il quesito verifica conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ Solo parzialmente</td><td colspan="2">☐ No</td></tr>
</table>