Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

QUESITO 2 – soluzione a cura di L. Tomasi

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x}$$

Soluzione

La $g(x)$ è una funzione polinomiale di grado dispari, che ha come centro di simmetria l'origine degli assi, ossia $g(x)$ è dispari. Possiamo scrivere $g(x)$nella seguente forma:

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2018})$$

Quindi $g(x)$ è il prodotto di x per una funzione polinomiale sempre positiva. L'unico zero di $g(x)$ è pertanto $x_0 = 0$.

Si può arrivare alla stessa conclusione osservando che $g(x)$ ha per derivata prima una funzione sempre positiva:

$$g'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + 2019x^{2018}$$

Pertanto la funzione $g(x)$ è crescente (in senso stretto) in $\mathbb{R}$. Il limite di $g(x)$ per x tendente a $+\infty$ è $+\infty$, mentre il limite di $g(x)$ per x tendente a $-\infty$ è $-\infty$. Quindi la funzione $g(x)$ ha uno ed un solo zero reale, che è $x_0 = 0$, essendo una funzione dispari.

Per calcolare il limite di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x}$$

che si presenta in forma indeterminata "∞ / ∞" , possiamo applicare ripetutamente la regola di De L'Hospital. Mentre il numeratore si riduce di grado (fino ad arrivare a una costante), il denominatore rimane sempre un esponenziale. Quindi il limite è 0.

Commento sul quesito 2

Livello di difficoltà stimato del quesito: medio.

L'argomento è ovviamente presente nel QdR di Matematica.

Di solito viene svolto nella pratica didattica usuale.

Per la risoluzione del quesito l'uso della calcolatrice grafica non serve. Si potrebbe però disegnare rapidamente il grafico di una funzione di questo tipo, per esempio $g(x) = x + x^3 + x^5$, che sarebbe stato più che sufficiente per controllare le stesse conoscenze e abilità, invece di giocare con l'anno di questa prova.