Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

QUESITO 4 – soluzione a cura di L. Tomasi

4. Dati i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-2,2,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Soluzione

Considerato un generico punto $P(x,y,z)$ dello spazio, imponiamo che $\overline{PA} = \overline{PB}\sqrt{2}$; si ottiene (elevando al quadrato):

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \cdot ((x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2)$$

Eseguiti i calcoli, si ottiene la seguente equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che rappresenta una superficie sferica di centro $C(-6,4,3)$ e raggio $r = 4\sqrt{3}$.

Si vede subito, sostituendo nell'equazione della sfera, che il punto T(-10, 8, 7) appartiene alla superficie sferica.

Consideriamo il vettore $\overrightarrow{CT}$; esso ha per componenti: $\overrightarrow{CT} = < -4, 4,4 >$.

Un generico piano perpendicolare al vettore $\overrightarrow{CT}$ ha per equazione

$-4x + 4y + 4z + d = 0$.

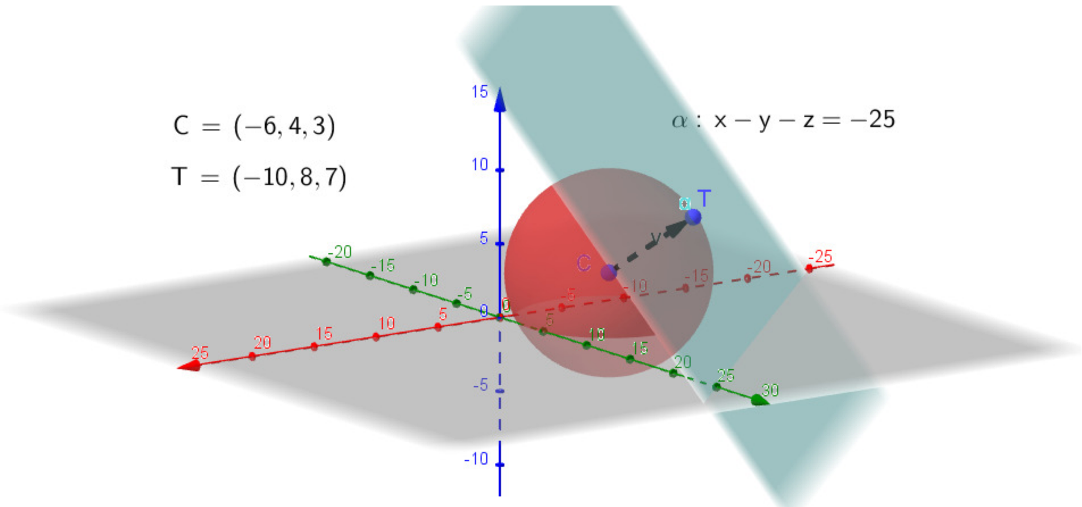
Imponendo che questo piano passi per il punto T(-10, 8, 7) , si ha $d = -100$.

Quindi il piano tangente in T alla sfera S ha equazione:

$-4x + 4y + 4z - 100 = 0$,

ovvero

$x - y - z + 25 = 0$.



Commento sul quesito 4

Livello di difficoltà stimato del quesito: medio.

L’argomento è presente nel QdR di Matematica.

Per la risoluzione del problema l’uso della calcolatrice grafica permette una visualizzazione della situazione geometrica. Il quesito è prevalentemente teorico e la calcolatrice permette di visualizzare la superficie sferica e il piano tangente.