

Esempio di Prova di MATEMATICA E FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 2 (traccia di soluzione di L. Rossi)

2. Sia \mathcal{R} la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in \mathcal{R} e aventi un lato sull'asse x , quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

Soluzione

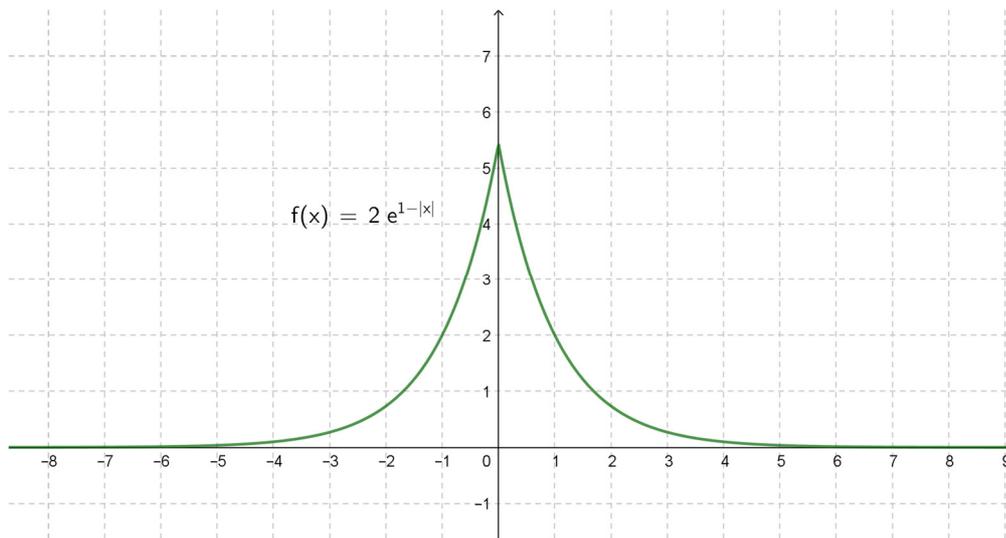
La funzione $y = 2e^{1-|x|}$ ha per dominio \mathbb{R} ; è pari, positiva ed ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse. È una funzione continua, ma non è derivabile in $x = 0$, dove ha un punto angoloso.

Per $x \geq 0$ si ottiene $f(x) = 2e^{1-x}$, la cui derivata prima è $f'(x) = -2e^{1-x}$. Quindi la funzione è decrescente per $x \geq 0$ e tende a zero per $x \rightarrow +\infty$.

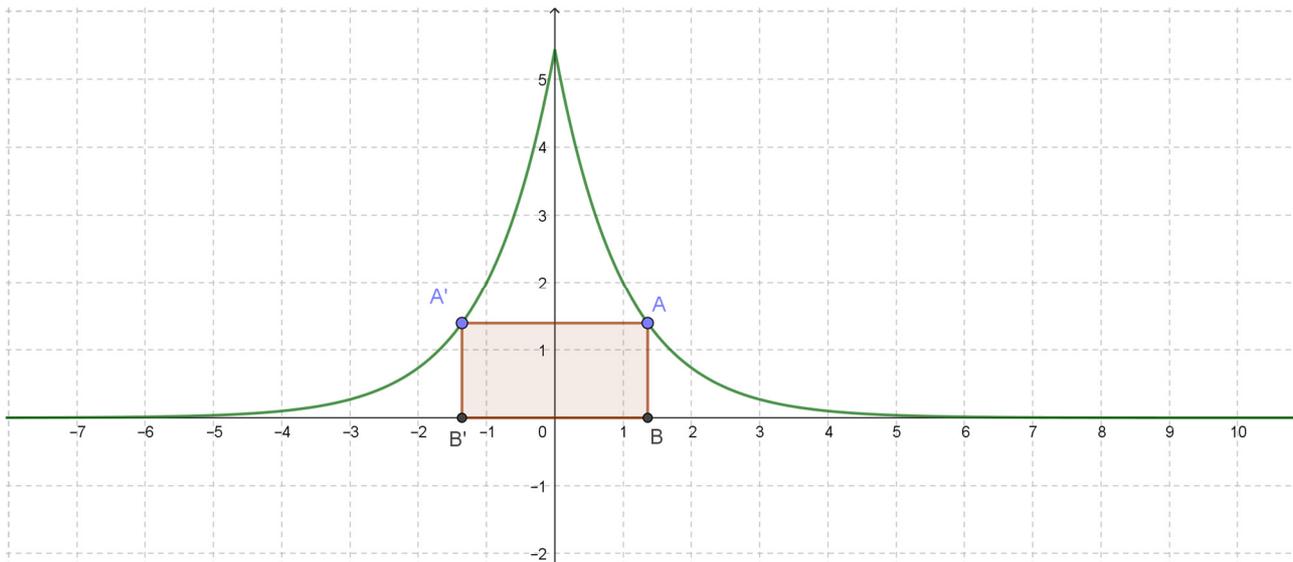
La derivata destra nel punto $x = 0$ è pertanto $f'_+(x) = -2e$.

Per $x \geq 0$ la derivata seconda è $f''(x) = 2e^{1-x}$, che è positiva. Pertanto la funzione $f(x)$ è convessa in tutto il suo dominio (dato che è pari).

Il grafico della funzione è quindi il seguente.



Inscriviamo un rettangolo con un lato sull'asse delle ascisse. Si ottiene la seguente figura.



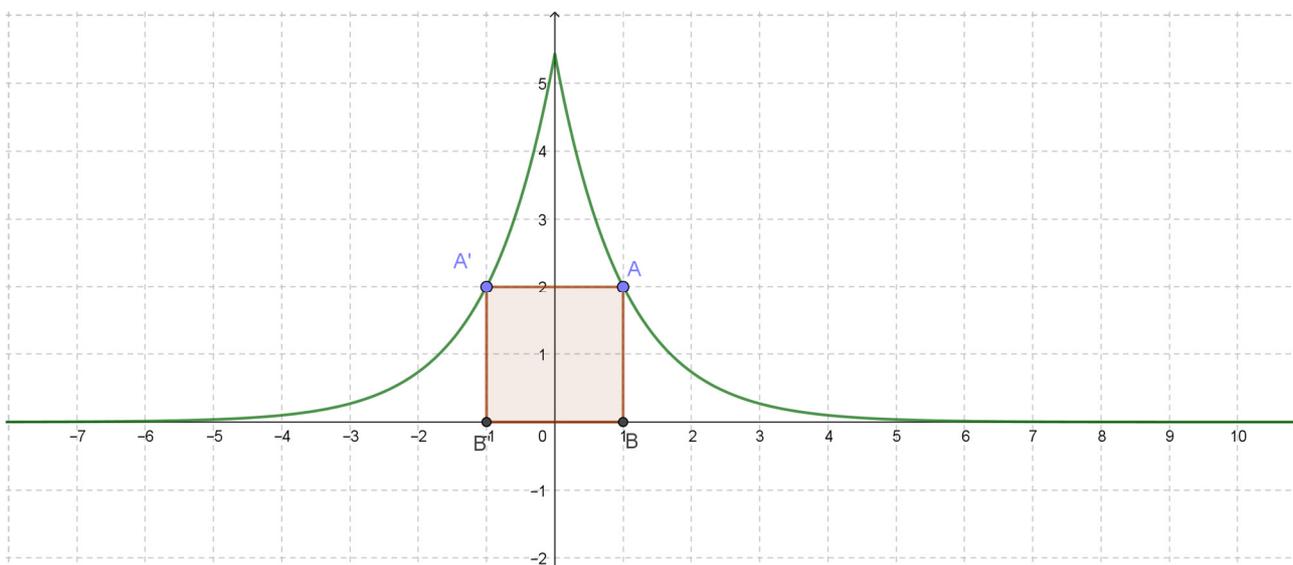
Supponiamo $x \geq 0$. Le coordinate del punto A sono $(x; 2e^{1-x})$.

L'area del rettangolo BAA'B' è data da $S(x) = 4xe^{1-x}$, con $x \geq 0$.

La derivata prima di $S(x)$ è quindi:

$$S'(x) = 4(e^{1-x} - xe^{1-x}) = 4e^{1-x}(1-x), \text{ con } x \geq 0.$$

Il massimo dell'area si ha per $x = 1$ e vale $S(1) = 4$. In tale caso la base del rettangolo e l'altezza misurano 2. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.



La funzione perimetro del rettangolo è esprimibile con la funzione: $g(x) = 4(x + e^{1-x})$ ($x \geq 0$); studiando il segno della derivata $g'(x) = 4(1 - e^{1-x})$ ($x \geq 0$) si ottiene che la funzione ha un punto di minimo in $x = 1$; dunque il rettangolo di perimetro minimo ha dimensioni 2×2 ed è il quadrato trovato nel punto precedente (il perimetro è 8).

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente	<input type="checkbox"/> In modo accettabile	<input type="checkbox"/> Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì		<input checked="" type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente