

## Esempio di Prova di MATEMATICA E FISICA - MIUR - 28.02.2019

### QUESITO 2 (traccia di soluzione di L. Rossi)

2. Sia  $\mathcal{R}$  la regione piana compresa tra l'asse  $x$  e la curva di equazione  $y = 2e^{1-|x|}$ . Provare che, tra i rettangoli inscritti in  $\mathcal{R}$  e aventi un lato sull'asse  $x$ , quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

#### Soluzione

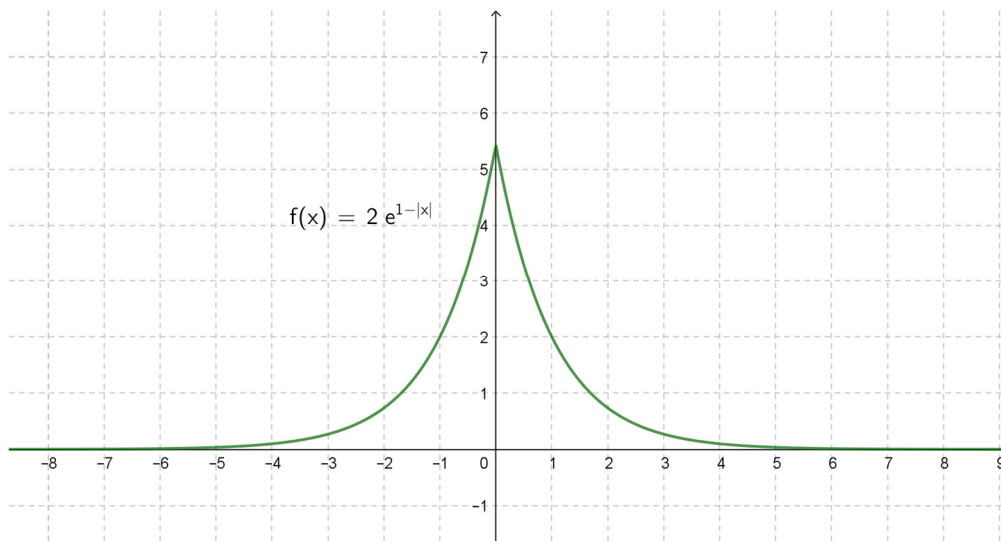
La funzione  $y = 2e^{1-|x|}$  ha per dominio  $\mathbb{R}$ ; è pari, positiva ed ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse. È una funzione continua, ma non è derivabile in  $x = 0$ , dove ha un punto angoloso.

Per  $x \geq 0$  si ottiene  $f(x) = 2e^{1-x}$ , la cui derivata prima è  $f'(x) = -2e^{1-x}$ . Quindi la funzione è decrescente per  $x \geq 0$  e tende a zero per  $x \rightarrow +\infty$ .

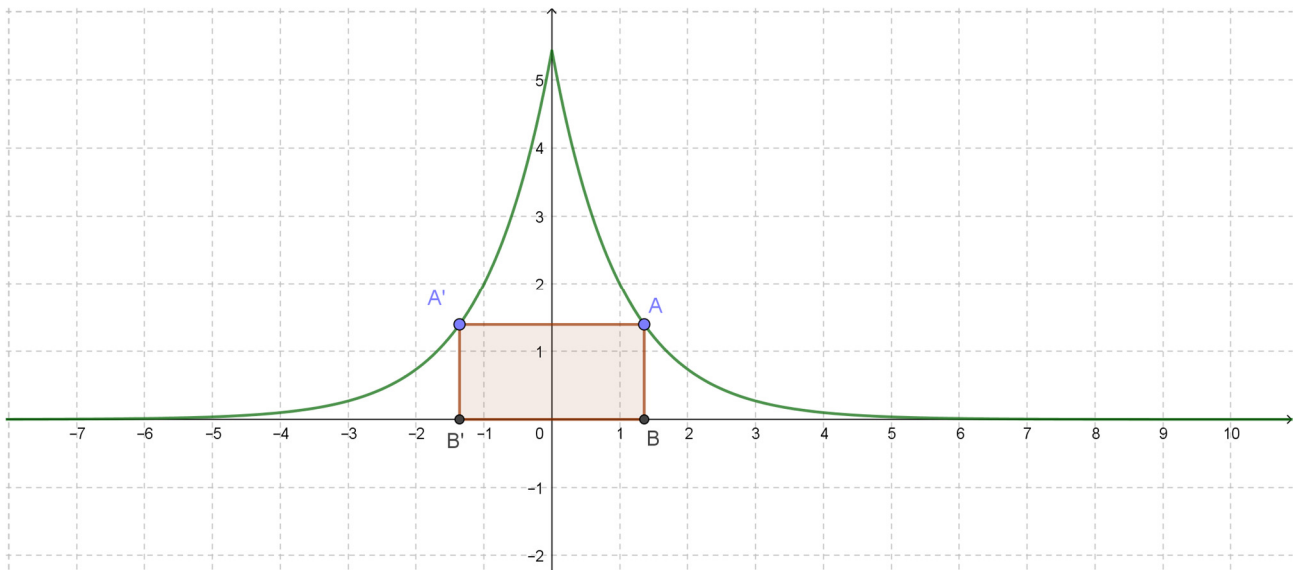
La derivata destra nel punto  $x = 0$  è pertanto  $f'_+(x) = -2e$ .

Per  $x \geq 0$  la derivata seconda è  $f''(x) = 2e^{1-x}$ , che è positiva. Pertanto la funzione  $f(x)$  è convessa in tutto il suo dominio (dato che è pari).

Il grafico della funzione è quindi il seguente.



Inscriviamo un rettangolo con un lato sull'asse delle ascisse. Si ottiene la seguente figura.



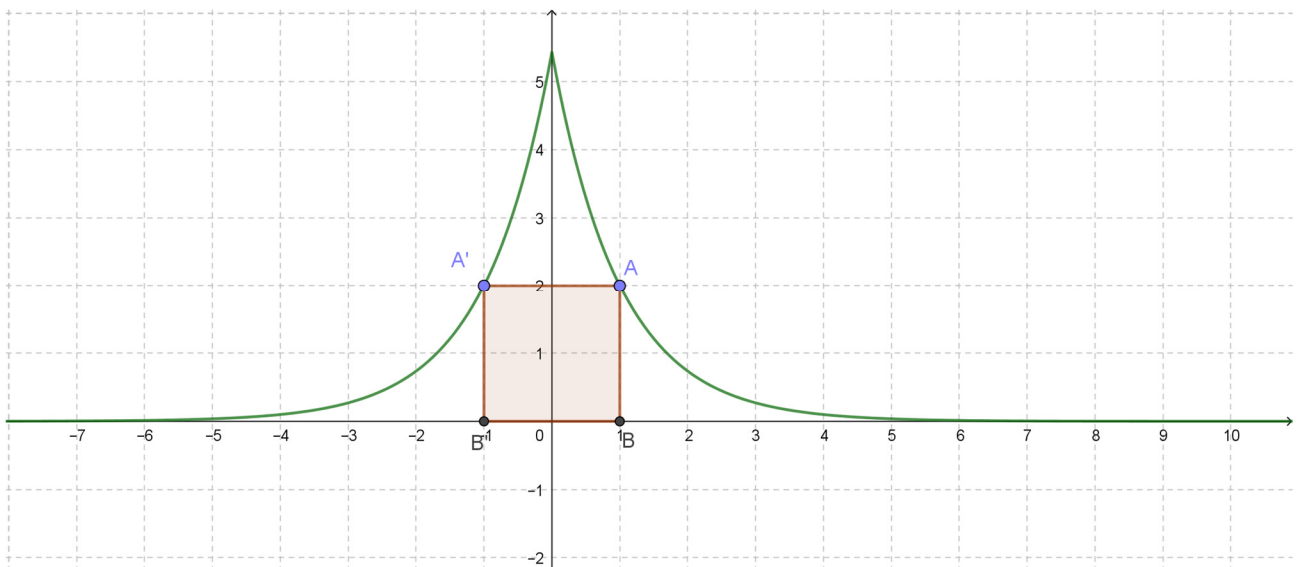
Supponiamo  $x \geq 0$ . Le coordinate del punto A sono  $(x; 2e^{1-x})$ .

L'area del rettangolo BAA'B' è data da  $S(x) = 4xe^{1-x}$ , con  $x \geq 0$ .

La derivata prima di  $S(x)$  è quindi:

$$S'(x) = 4(e^{1-x} - xe^{1-x}) = 4e^{1-x}(1-x), \text{ con } x \geq 0.$$

Il massimo dell'area si ha per  $x = 1$  e vale  $S(1) = 4$ . In tale caso la base del rettangolo e l'altezza misurano 2. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.



La funzione perimetro del rettangolo è esprimibile con la funzione:  $g(x) = 4(x + e^{1-x})$  ( $x \geq 0$ ); studiando il segno della derivata  $g'(x) = 4(1 - e^{1-x})$  ( $x \geq 0$ ) si ottiene che la funzione ha un punto di minimo in  $x = 1$ ; dunque il rettangolo di perimetro minimo ha dimensioni  $2 \times 2$  ed è il quadrato trovato nel punto precedente (il perimetro è 8).

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
<b>Formulazione del problema</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
<b>Si tratta di un problema contestualizzato</b>	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente	<input type="checkbox"/> In modo accettabile	<input type="checkbox"/> Ben contestualizzato	
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
<b>Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
<b>Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?</b>	<input type="checkbox"/> Sì		<input checked="" type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente