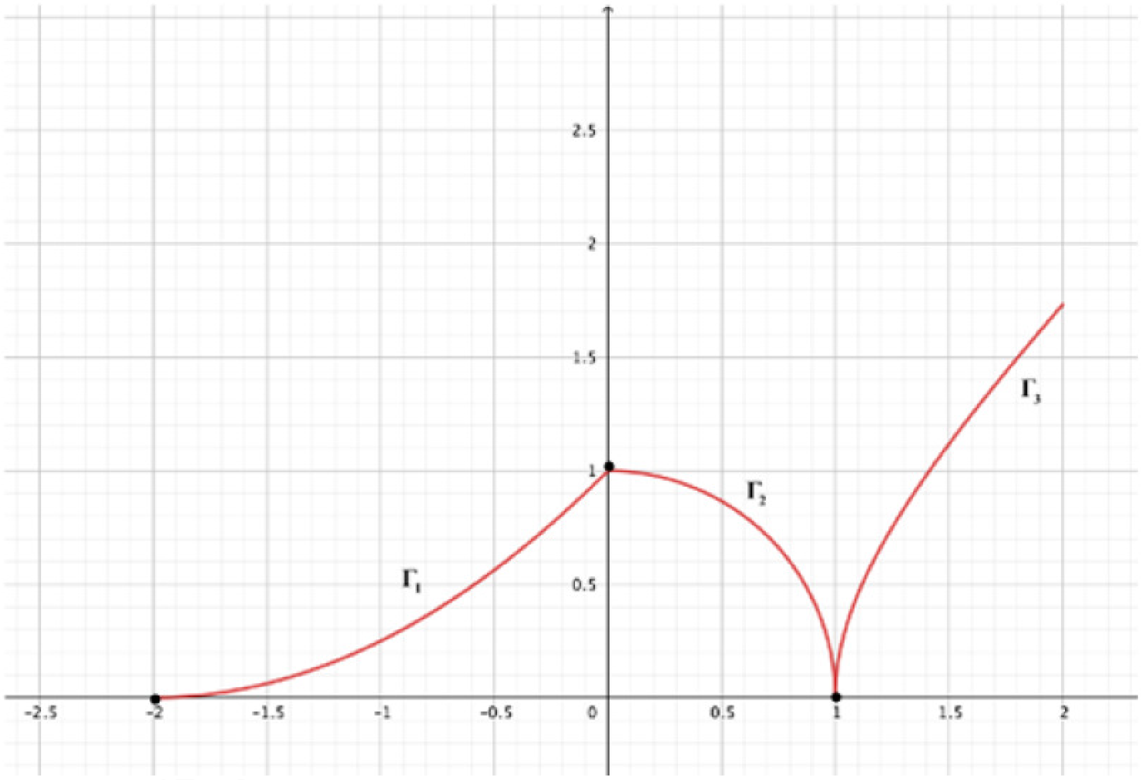
Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Tomasi

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali *a, b, c*.

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

b) A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Soluzione

Punto a)

Imponendo il passaggio per i punti indicati in figura [che comunque dovevano essere esplicitamente dichiarati, con le loro coordinate, nel testo della prova; a rigore, le coordinate dei punti non possono essere ricavate da una figura] si trova immediatamente che $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$ e $c = -1$.

Quindi l'espressione analitica della funzione è la seguente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Il grafico è indicato in figura 1.

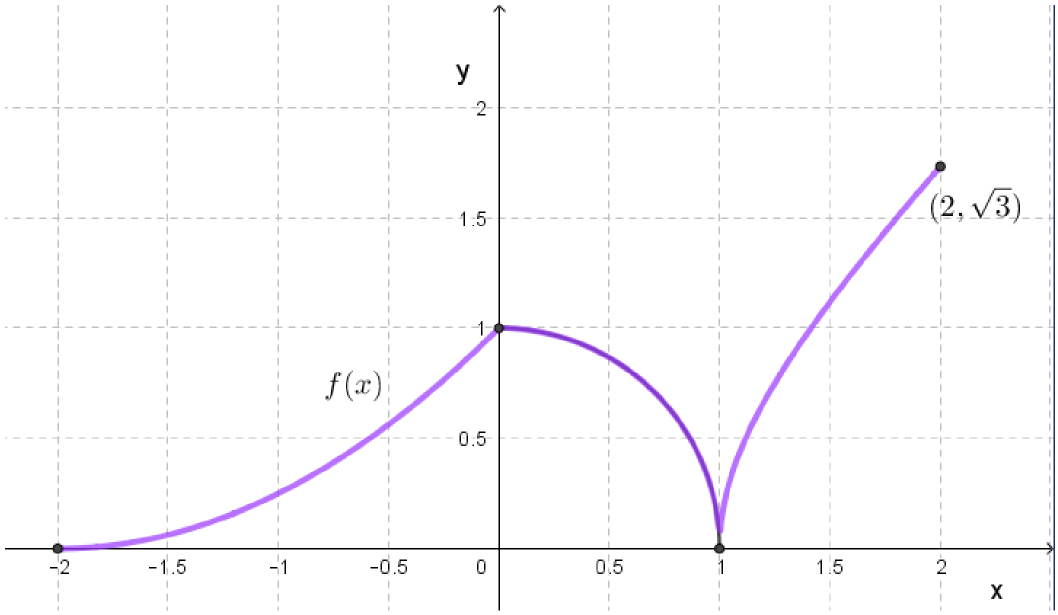


figura 1

La funzione $f(x)$ è derivabile nell'intervallo (assegnato) $-2 \leq x \leq 2$, tranne nei punti $x = 0$ (punto angoloso) e nel punto $x = 1$ (punto cuspidale).

Nel punto $x = -2$, la retta tangente è l'asse delle x.

Nel punto $x = 0$ la derivata sinistra è 1 e la derivata destra è 0. La retta tangente a sinistra ha quindi equazione $y = x + 1$ e a destra $y = 1$.

Nel punto $x = 1$, non esiste la derivata (a sinistra il limite del rapporto incrementale tende a $-\infty$, mentre a destra tende a $+\infty$). Si tratta di una cuspide e la retta tangente ha equazione $x = 1$.

Nel punto $x = 2$ la derivata è $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e la retta tangente ha equazione: $y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2)$, ossia $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Punto b)

Per quanto detto al punto a), la derivata ha l'espressione analitica:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & -2 \le x < 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Il grafico della $f'(x)$ è rappresentato in figura 2.
Nel punto $x = 0$ la funzione $f'(x)$ ha una discontinuità di "prima specie" (salto$= -1$) e nel punto $x = 1$ la $f'(x)$ ha una discontinuità di "seconda specie"; la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per il grafico della $f'(x)$.

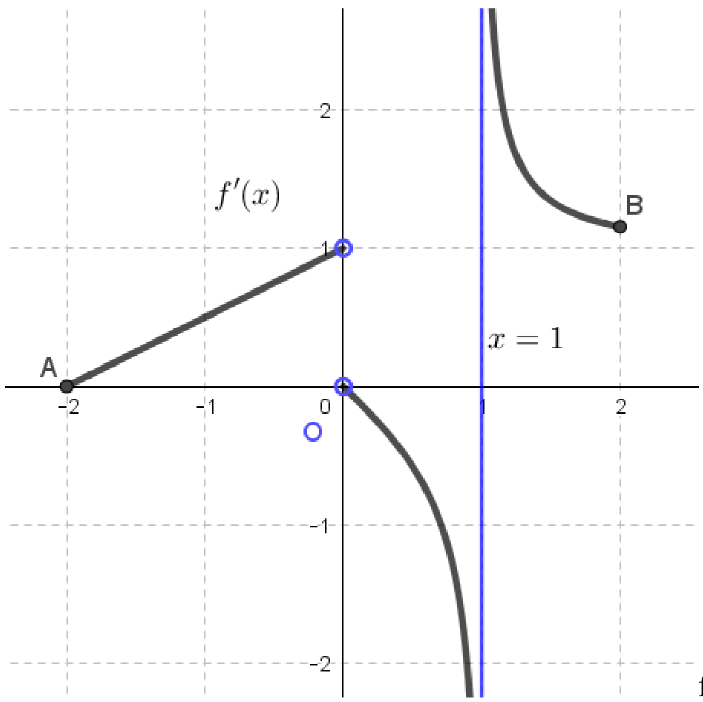


figura 2

Si ha

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt = \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{2}{3} + \int_{0}^{x} f(t)dt\,.$$

Quindi

$$F'(x) = f(x)$$

e

$$F''(x) = f'(x)\ .$$

La funzione $f'(x)$ è la derivata seconda della $F(x)$; quindi $F(x)$ è convessa negli intervalli $-2 < x < 0$ e per $1 < x < 2$; è concava nell'intervallo $0 < x < 1$.
Essendo $f(x) \ge 0$, la funzione $F(x)$ è crescente nel suo dominio.
Il grafico ha due flessi, il primo è il punto $R\left(0;\frac{2}{3}\right)$ e il secondo è il punto $S\left(1;\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.
Il grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$$

è riportato in figura 4.

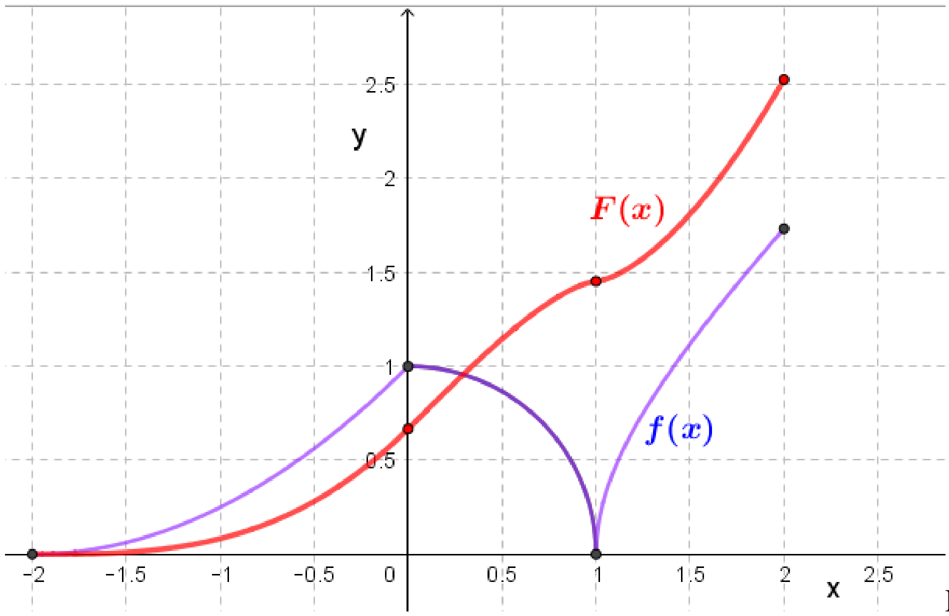


Figura 4

Punto c)

La funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ nell'intervallo $[-2,0]$ è un arco di parabola "a destra" del vertice; pertanto è il grafico di una funzione iniettiva. Se consideriamo come codominio l'intervallo $[0,1]$, immagine del dominio, allora è anche suriettiva; quindi è invertibile.

La sua inversa si ottiene risolvendo l'equazione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ rispetto alla variabile *x*. Si ottiene:

$$x + 2 = \pm 2\sqrt{y}$$

Si sceglie

$$x + 2 = 2\sqrt{y}$$

dovendo essere $x + 2 \geq 0$. Quindi si ha:

$$x = 2\sqrt{y} - 2$$

Scambiando le variabili, si ha l'espressione analitica della funzione inversa:

$$y = h(x) = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$$

con $0 \leq x \leq 1$ (grafico nella figura 5).

Si ha:

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La funzione $h(x)$ è derivabile, tranne nel punto $x = 0$, perché funzione inversa di una funzione derivabile. Il grafico è un arco della parabola di equazione $x = \frac{1}{4}(y+2)^2$.

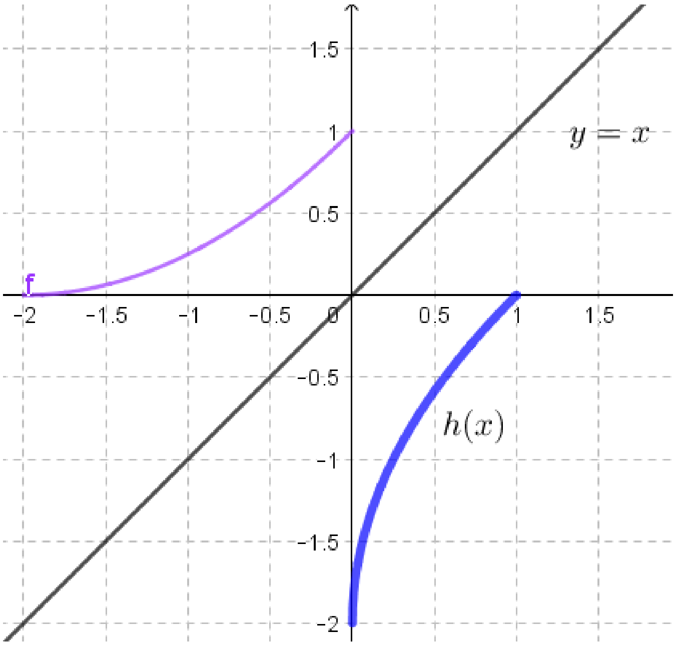


figura 5

Punto d)

L'area del segmento parabolico *AOB*, calcolata con il teorema di Archimede è 2/3 (figura 6).

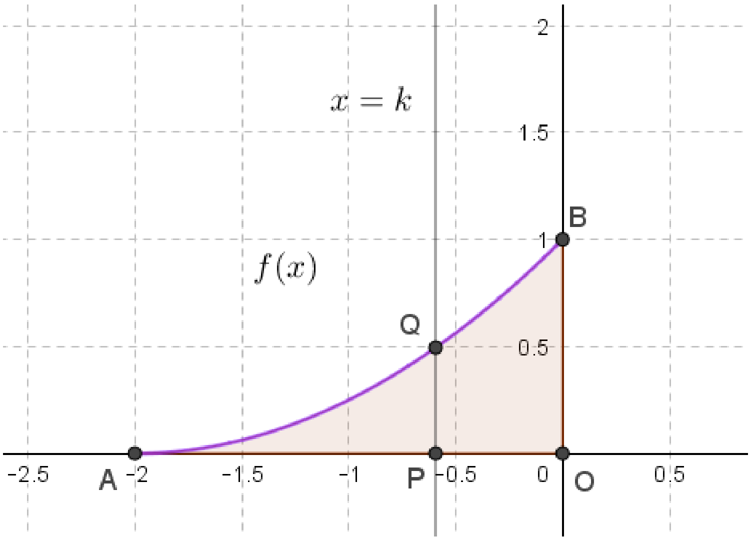


figura 6

L'area del segmento parabolico *APQ* (calcolata con il teorema di Archimede) è:

$$Area(APQ) = \frac{1}{3}(k+2)\frac{1}{4}(k+2)^2$$

$(-2 < k < 0)$, ossia

$$Area(APQ) = \frac{1}{12}(k+2)^3 .$$

Quindi deve essere

$$\frac{1}{12}(k+2)^3 = \frac{1}{3}$$

che risolta fornisce

$$k = \sqrt[3]{4} - 2 \approx -0{,}41.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		