Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di L. Rossi e L. Tomasi

Fissato un parametro reale a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro a, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Soluzione

Punto a)

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}, \qquad a \neq 0$$

La funzione possiede, per ogni $a \neq 0$, come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$, essendo per la regola dei gradi $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 1$.

Se $a < 0$ il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ e quindi anche continua.

Se $a > 0$ il dominio della funzione è $\mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{a}\}$, la funzione ha due punti di discontinuità, che sono $x = \sqrt{a}$ e $x = -\sqrt{a}$; studiamone "la specie" nei casi $a = 1$ e $a > 0 \wedge a \neq 1$.

Per $a = 1$, si ottiene la funzione

$$f_1(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} \quad (x \neq 1 \text{ e } x \neq -1)$$

il cui grafico è un'iperbole equilatera privata del punto $\left(1; \frac{1}{2}\right)$; vedi figura 1.

Calcoliamo i limiti di $f_1(x)$ nei punti di discontinuità. Si ha:

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] Forma\ Ind. = \lim_{x\to1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$; quindi $x = 1$ è punto di discontinuità "di terza specie";

$\lim_{x\to-1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \infty$; quindi $x = -1$ è punto di discontinuità "di seconda specie" e la funzione possiede asintoto verticale di equazione: $x = -1$.

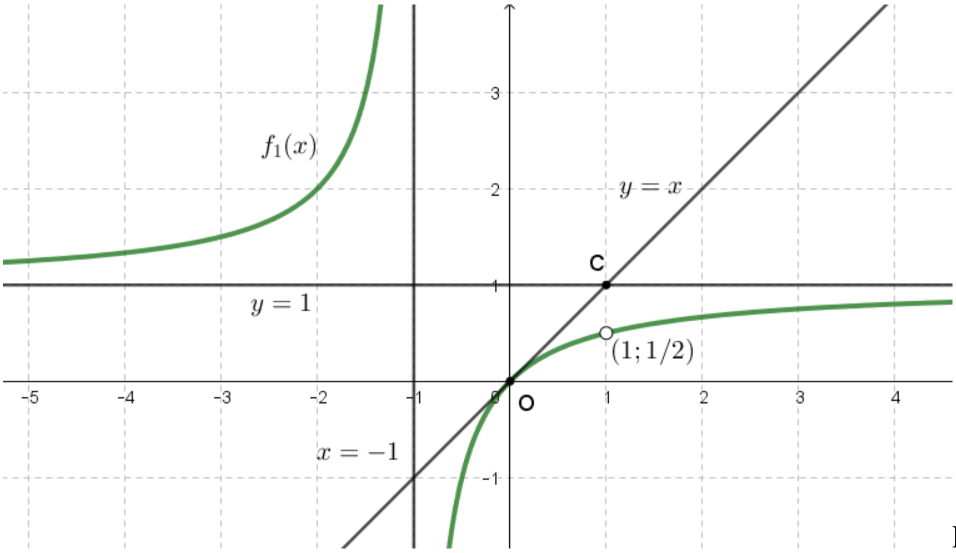

Figura 1 $(a = 1)$

Se $a \neq 1 \wedge a > 0$, calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità.

Si ha $\lim_{x \to \sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \infty$; quindi $\forall a > 0 \wedge a \neq 1, x = \sqrt{a}$ è punto di discontinuità "di seconda specie" e la funzione possiede anche la retta di equazione $x = \sqrt{a}$ come asintoto verticale.

Inoltre si ha $\lim_{x \to -\sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \infty$; quindi $\forall a > 0 \wedge a \neq 1, x = -\sqrt{a}$ è punto di discontinuità "di seconda specie" e la funzione possiede anche l'asintoto verticale di equazione $x = -\sqrt{a}$ (figura 2).

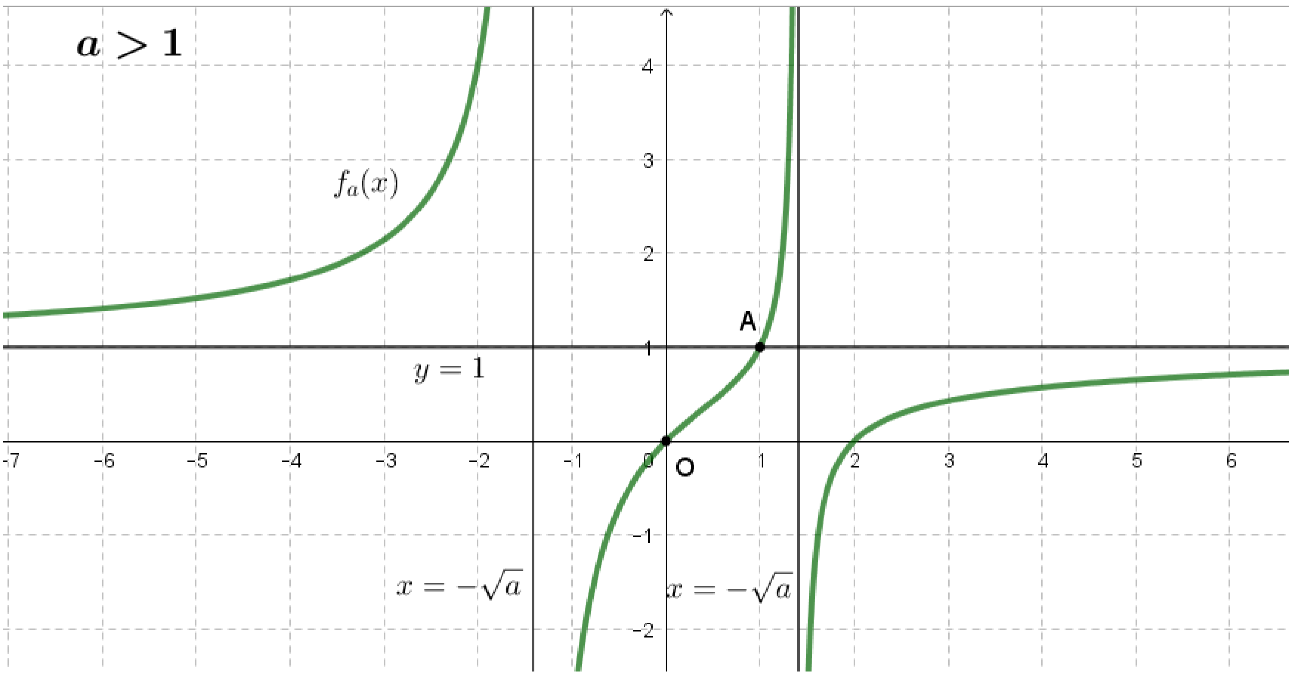

Figura 2

Punto b)

Se $a \neq 1$, mettiamo a sistema la generica funzione con l'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a} \\ y = 1 \end{cases} \qquad a \neq 0 \wedge a \neq 1$$

Svolgendo i calcoli si ottiene come soluzione accettabile il punto $A(1;1)$ indipendentemente da a.
Calcolando la derivata prima, si ha:

$$f_a'(x) = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2}, \qquad a \neq 0 \wedge a \neq 1$$

Nel punto $x = 0$, si ha:

$$f_a'(0) = 1.$$

Dunque tutte le curve, con $a \neq 0$, condividono la stessa retta tangente nell'origine che ha equazione: $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante).

Punto c)

Sia $a < 1 \wedge a \neq 0$, $f_a'(x) = \frac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2}$, il segno della derivata prima dipende dal segno di a e dal segno del trinomio $x^2 - 2x + a$ il cui $\frac{\Delta}{4} = 1 - a > 0$ per ipotesi, dunque il trinomio ha sempre due zeri.

Se $a < 0$ la funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed è decrescente per $x \leq 1 - \sqrt{1-a}$ e $x \geq 1 + \sqrt{1-a}$ e crescente per $1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}$. I punti N e M di ascissa $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ sono rispettivamente punto di minimo $\left(x = 1 - \sqrt{1-a}\right)$ e punto di massimo $\left(x = 1 + \sqrt{1-a}\right)$. Il grafico è riportato nella figura 3.

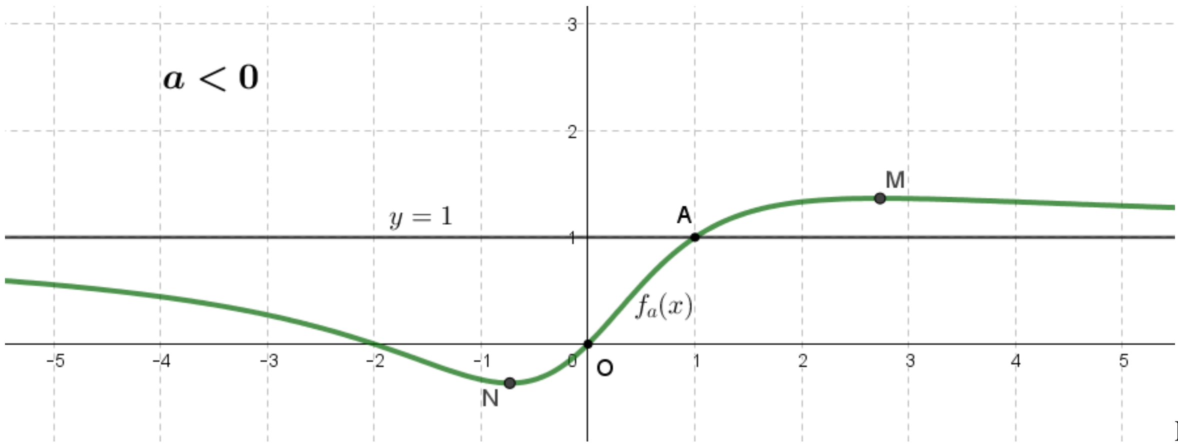

Figura 3

Se $0 < a < 1$ la funzione è discontinua in $x = \pm\sqrt{a}$; è crescente per $x < -\sqrt{a}, -\sqrt{a} < x \leq 1 - \sqrt{1-a}$, $x \geq 1 + \sqrt{1-a}$ e decrescente per $1 - \sqrt{1-a} \leq x < \sqrt{a}, \sqrt{a} < x \leq 1 + \sqrt{1-a}$.

I punti $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ sono rispettivamente punto di massimo relativo $\left(x = 1 - \sqrt{1-a}\right)$ e punto di minimo relativo $\left(x = 1 + \sqrt{1-a}\right)$. Il grafico è riportato nella figura 4.

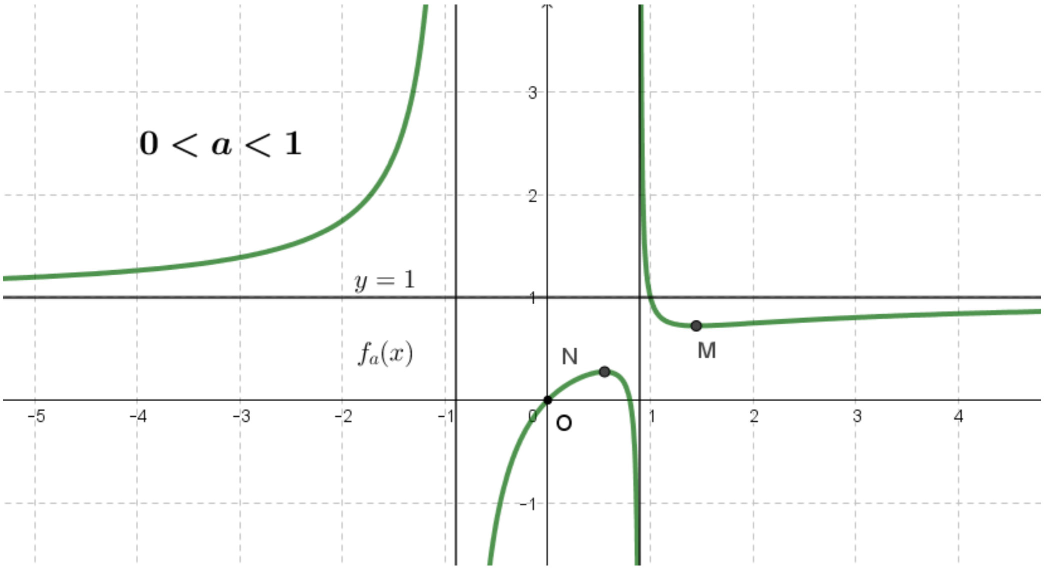

Figura 4

Studio della funzione ottenuta per $a = -1$:

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \text{ .}$$

Dominio: $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}$ e quindi continua.

Segno: positiva per $x < -1, x > 0$; negativa per $-1 < x < 0$. Si annulla in $x = -1, x = 0$.

Possiede per asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$, come già osservato al Punto a).

Come calcolato nel punto b), la derivata prima è:

$$f_{-1}'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Studiando il segno della derivata prima, risulta che la funzione è decrescente per $x \leq 1 - \sqrt{2}$ e $x \geq 1 + \sqrt{2}$, crescente per $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$, quindi $x = 1 - \sqrt{2}$ è punto di minimo e $x = 1 + \sqrt{2}$ è punto di massimo.

La derivata seconda è data da:

$$f_{-1}''(x) = \frac{2(x + 1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

Studiandone il segno risulta che la funzione è convessa per $-1 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}$, $x \geq 2 + \sqrt{3}$, concava per $x \leq -1$, $2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$; quindi la funzione possiede tre punti di flesso in $x = -1,\ x = 2 \pm \sqrt{3}$; vedi figura 5 per il grafico.

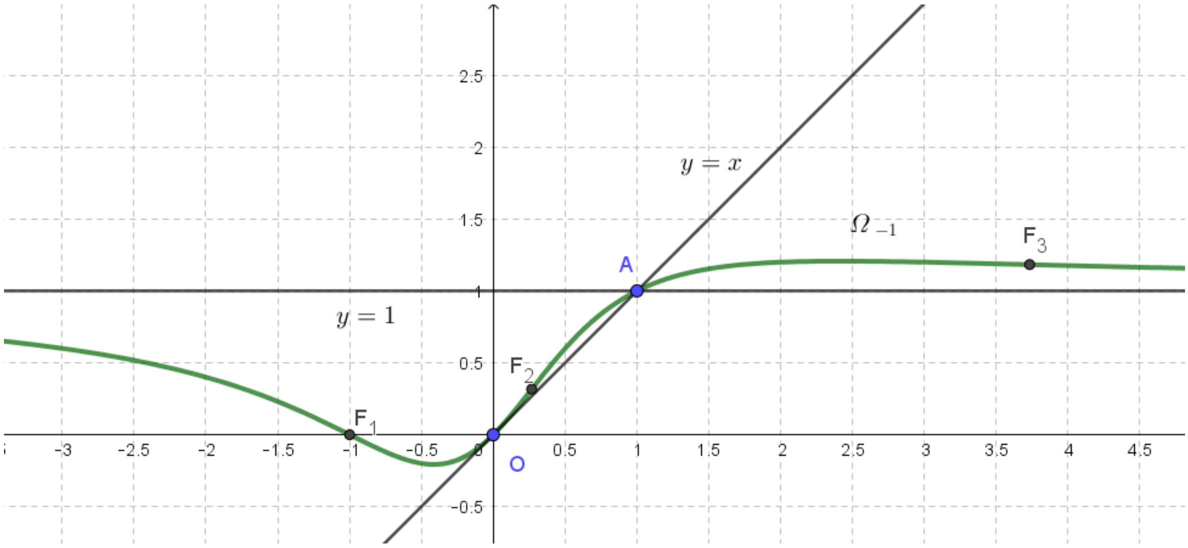

Figura 5

Punto d)

Nella figura 6 rappresentiamo il grafico della funzione $f_{-1}(x)$, la retta tangente in O, la retta di equazione $x = \sqrt{3}$ e la regione di piano "limitata compresa dal grafico Ω_{-1}, la tangente al grafico nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$ ".

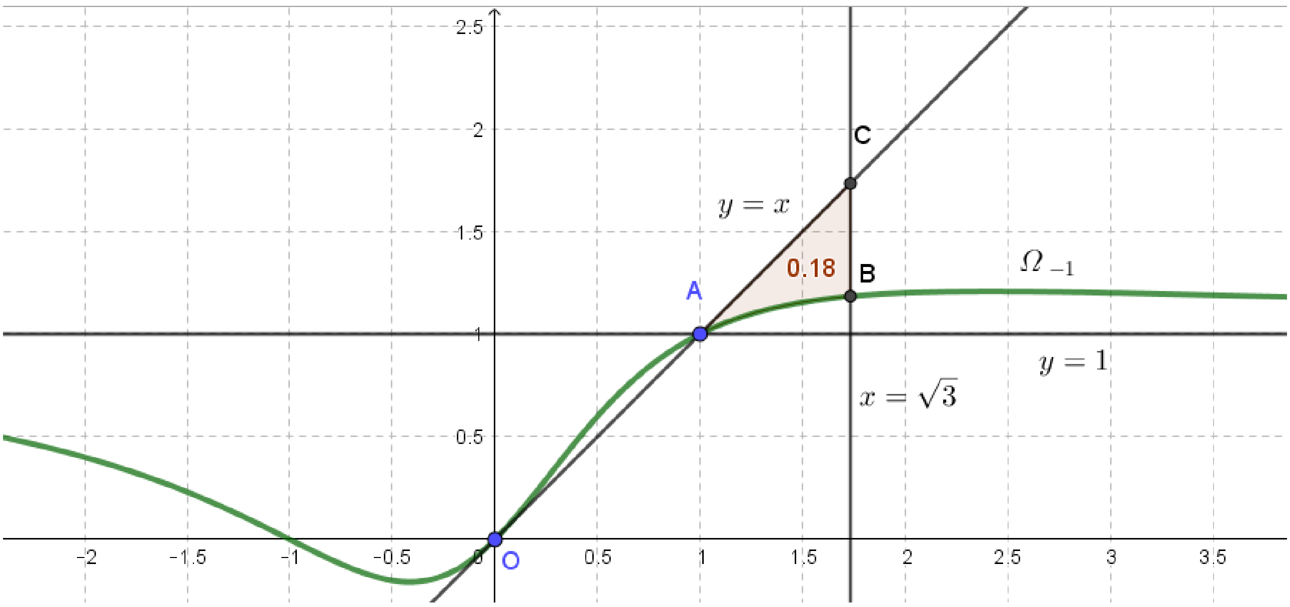

Figura 6

L'area S richiesta [in realtà il testo del punto (d) non è chiarissimo…] è rappresentata dal seguente integrale definito (calcolato tra $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$):

$$S = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right) dx .$$

L'integrale indefinito è dato da:

$$F(x) = \int \left(x - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(x - \frac{x^2 + 1 - 1 + x}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \int \left(x - 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + c, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Dalla formula per il calcolo di un integrale definito (conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo integrale), segue che l'area richiesta vale:

$$S = F\left(\sqrt{3}\right) - F(1) = 2 - \sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \ln 2 + \tfrac{\pi}{12} \approx 0{,}18\,.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		