

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023

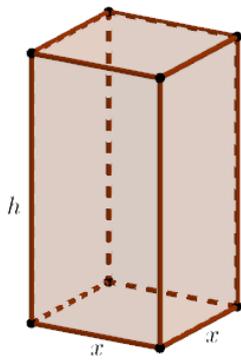
QUESITO 4 - soluzione a cura di L. Rossi e V. Roselli

4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

[Osservazione: Il testo doveva specificare che si trattava di un parallelepipedo *rettangolo*, altrimenti non c'è una sola diagonale e il problema cade.]

Soluzione 1 (con l'uso delle derivate)

Indicato con $x > 0$ il lato del quadrato di base del parallelepipedo [rettangolo], l'altezza è $h = \frac{V}{x^2}$.



Studiamo la funzione superficie totale del parallelepipedo data da 2 basi quadrate di lato x e di 4 facce laterali rettangolari di dimensioni x e $\frac{V}{x^2}$; la funzione da ottimizzare è $f(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x}$ con $x > 0$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$f'(x) = 4x - \frac{4V}{x^2} \text{ con } x > 0$$

$$f'(x) = 4 \frac{x^3 - V}{x^2} \text{ con } x > 0$$

La funzione è decrescente per $0 < x \leq \sqrt[3]{V}$ e crescente per $x \geq \sqrt[3]{V}$, quindi il parallelepipedo di base quadrata, volume V e di area totale minima è il cubo di lato $x = \sqrt[3]{V}$.

Studiamo la funzione misura della diagonale del parallelepipedo, ipotenusa di un triangolo che ha come cateti la diagonale di un quadrato di lato x (che misura $x\sqrt{2}$) e l'altezza h del parallelepipedo; la funzione da ottimizzare è $d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}$ con $x > 0$.

Essendo la funzione positiva, i suoi eventuali punti di massimo e di minimo sono gli stessi della funzione elevata al quadrato: $r(x) = 2x^2 + \frac{V^2}{x^4}$ con $x > 0$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$r'(x) = 4x - \frac{4V^2}{x^5} \text{ con } x > 0$$

$$r'(x) = 4 \frac{x^6 - V^2}{x^5} \text{ con } x > 0$$

La funzione è decrescente per $0 < x \leq \sqrt[3]{V}$ e crescente per $x \geq \sqrt[3]{V}$, quindi il parallelepipedo di base quadrata e volume V e di diagonale di lunghezza minima è il cubo ed è anche il parallelepipedo di base quadrata e volume V e di area totale minima.

Soluzione 2 (con metodo elementare, senza usare le derivate) di V. Roselli

Indicata con x la lunghezza del lato del quadrato di base, la conoscenza del volume ci permette di ricavare l'altezza del parallelepipedo [rettangolo], che è

$$h = \frac{V}{x^2}.$$

A questo punto l'area totale del parallelepipedo è data da

$$A_T = A_L + 2A_B = 4xh + 2x^2$$

e sostituendo il valore trovato per h si ha

$$A_T = A_L + 2A_B = 4x \frac{V}{x^2} + 2x^2 = \frac{4V}{x} + 2x^2.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$A_T = \frac{4V}{x} + 2x^2 = \frac{2V}{x} + \frac{2V}{x} + 2x^2.$$

Poiché il prodotto di questi tre addendi è costante $\left(\frac{2V}{x} \cdot \frac{2V}{x} \cdot 2x^2 = 8V^2\right)$, la loro somma A_T è minima se è possibile che essi siano tutti uguali, ossia se

$$2x^2 = \frac{2V}{x} \text{ da cui } x^3 = V \text{ e quindi } x = \sqrt[3]{V}.$$

Passiamo ora alla diagonale del parallelepipedo. Essa è data da (lavorando direttamente sul quadrato della diagonale)

$$d^2 = h^2 + 2x^2 = \frac{V^2}{x^4} + 2x^2$$

Possiamo scrivere

$$d^2 = \frac{V^2}{x^4} + x^2 + x^2$$

E poiché il prodotto di questi tre addendi $\left(\frac{V^2}{x^4} \cdot x^2 \cdot x^2 = V^2\right)$ è costante, la loro somma d^2 è minima se è possibile che essi siano uguali, ossia se

$$\frac{V^2}{x^4} = x^2$$

da cui $x^6 = V^2$ e di nuovo $x = \sqrt[3]{V}$ (il parallelepipedo è un cubo).

Tabella di analisi del quesito (Matematica)

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Parzialmente