

**Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico**  
**Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023**

**QUESITO 6 - soluzione a cura di M. Ferrari e V. Roselli**

6. Determinare i valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

**Soluzione 1**

Calcolo del limite richiesto:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \frac{0}{0}$  forma indeterminata.

Ricorrendo le ipotesi, applico il teorema di De L'Hospital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}$ .

Il denominatore tende a 0. Sapendo che il risultato del limite è 1, il numeratore necessariamente deve tendere a 0. Quindi

$$1 - b = 0, \text{ cioè } b = 1.$$

Applico nuovamente il teorema di De L'Hospital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \frac{0}{0}$  forma indeterminata.

Usando il primo limite notevole dell'analisi ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\sin x}{6x} - \frac{6ax}{6x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sin x}{x} - a \right) = -\frac{1}{6} - a.$$

Poiché il risultato del limite deve essere 1, si ottiene:  $-\frac{1}{6} - a = 1$ , da cui  $a = -\frac{7}{6}$ .

**Soluzione 2 (di V. Roselli)**

(La prima parte, in cui si determina che  $b = 1$ , è uguale alla soluzione precedente).

Calcolo del limite richiesto:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \frac{0}{0}$  forma indeterminata.

Ricorrendo le ipotesi, applichiamo il teorema di De L'Hospital e otteniamo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}$ .

Il denominatore tende a 0. Sapendo che il risultato del limite è 1, il numeratore necessariamente deve tendere a 0. Quindi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 3ax^2 - b) = 0, \text{ cioè } 1 - b = 0, \text{ da cui } b = 1.$$

Otteniamo quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = 1$$

che possiamo riscrivere come segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} - a \right) = 1 \quad (*)$$

Poiché vale il seguente limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(immediata conseguenza del primo limite notevole dell'analisi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

sostituendo in (\*) si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - a \right) = 1$$

ossia

$$-\frac{1}{6} - a = 1$$

da cui finalmente si ricava

$$a = -\frac{7}{6}$$

#### Tabella di analisi del quesito

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
<b>Formulazione del quesito</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
<b>Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
<b>Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?</b>	<input type="checkbox"/> Sì		<input checked="" type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente