

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023

QUESITO 7 - soluzione a cura di S. De Stefani

7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di \mathbb{R} in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione

Affinché la funzione sia continua in $x = 0$ deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + \arctan x) = -1$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

da cui $b = -1$.

Per la derivabilità si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x < 0 \\ a, & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a = a$$

da cui $a = 1$.

Non esiste un intervallo reale in cui la

$$\text{funzione } f(x) = \begin{cases} \arctan x - 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

soddisfi tutte le ipotesi di Rolle poiché, essendo monotona crescente, non può avere due punti tali che la terza ipotesi ($f(a) = f(b)$) del Teorema sia soddisfatta.

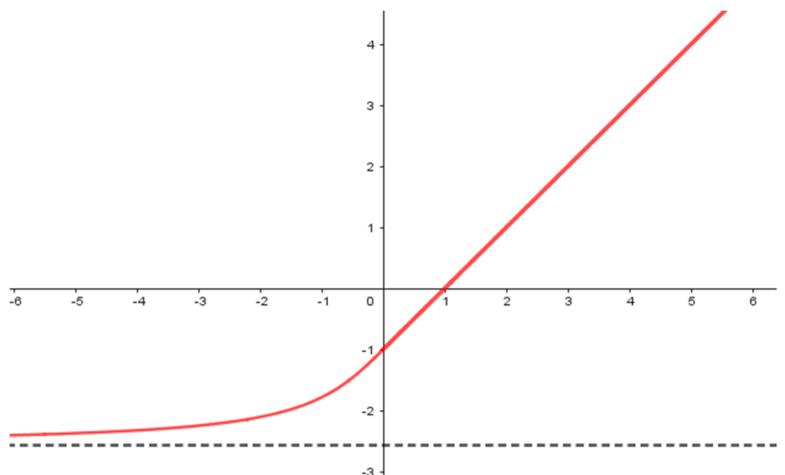


Tabella di analisi del quesito (Matematica)

Livello di difficoltà stimato	<input checked="" type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente