6 luglio 2023

Sessione suppletiva 2023
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Assegnata la funzione

$$f(x) = a\,x\,ln\,(x) - \frac{3}{2}x$$

a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0,-1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

PROBLEMA 2

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.

È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$

- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale

- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.

a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

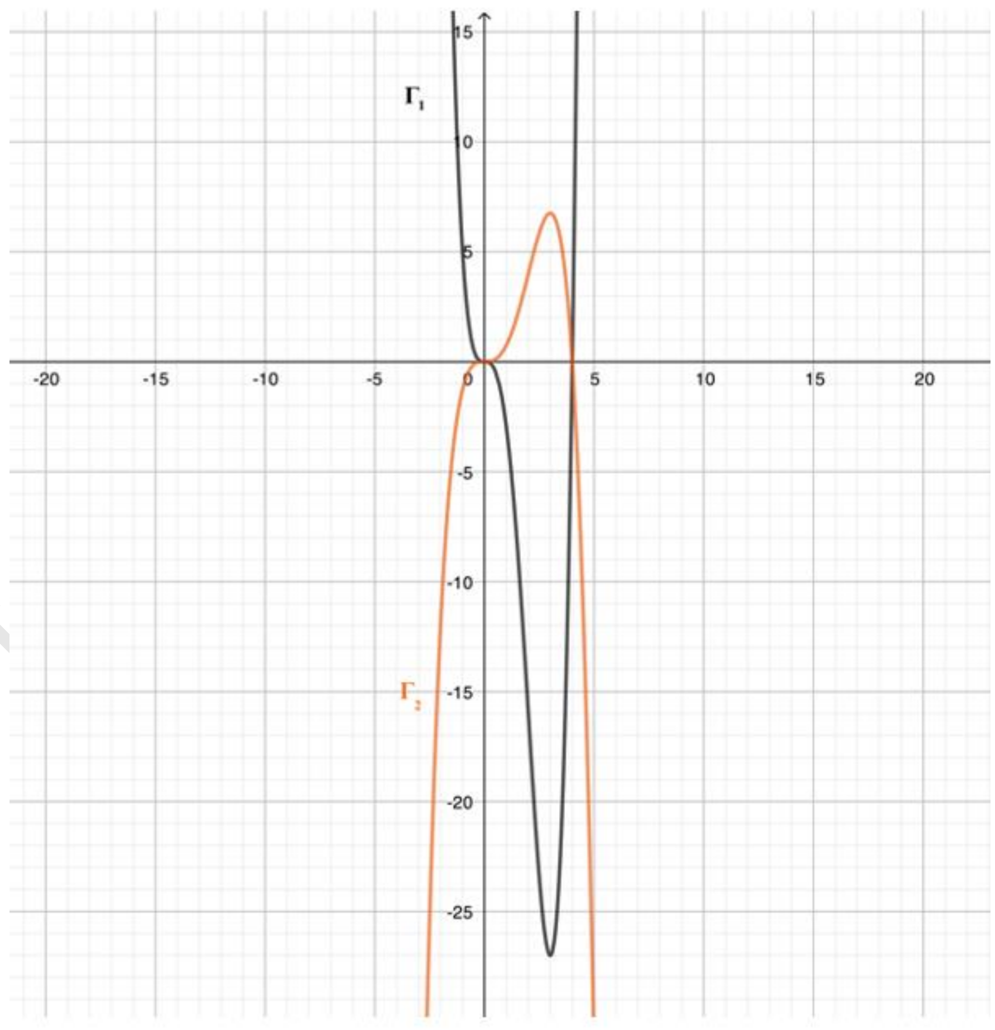
b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4} ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$. Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento G'G'' è parallelo a BC.
2. Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?
3. Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.
4. Una sfera, di raggio *r* fissato, è inscritta nel cono *S* di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?
5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.
6. Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1,-4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.
7. Calcolare
$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t} dt}{(x-1)^2}$$
8. Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b). Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$" e B: "$\exists\ x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b).
    1. $A \Rightarrow B$
    2. $B \Rightarrow A$
    3. $A \Leftrightarrow B$
    4. $B \Leftrightarrow A$

    Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.