Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica – sessione suppletiva – 6 luglio 2023

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Tomasi

Assegnata la funzione

$$f(x) = a\, x\, ln\,(x) - \frac{3}{2}x$$

a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

Soluzione

Punto a)

La funzione (in cui è presente il parametro a)

$$f(x) = a\,x \ln x - \frac{3}{2}x$$

ha come dominio i numeri reali positivi ($x > 0$) ed è continua e derivabile nel suo dominio. Il punto $x = 0$ si usa chiamare "un punto di discontinuità della funzione" anche se non appartiene al dominio (è però un punto di accumulazione del dominio).

Punto a)

La derivata prima è data da

$$f'(x) = a\ \ln x + a - \frac{3}{2} = a(\ln x + 1) - \frac{3}{2}$$

Poiché $x = \sqrt{e}$ deve essere un punto di minimo relativo (e assoluto), si ha $f'(\sqrt{2}) = 0$, ossia

$$a(\ln\sqrt{2} + 1) - \frac{3}{2} = 0$$

Si ha pertanto $a = 1$ e si ottiene la funzione

$$f(x) = x\ln x - \frac{3}{2}x = x\left(\ln x - \frac{3}{2}\right).$$

Come si è detto, la funzione è continua e derivabile nel suo dominio. L'unico punto di discontinuità è $x = 0$, che non appartiene al dominio.

La funzione interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = \sqrt{e^3} \approx 4{,}48$, è negativa per $0 < x < \sqrt{e^3}$ ed è positiva per $x > \sqrt{e^3}$.

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x \ln x - \frac{3}{2} x \right)$$

Poiché $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \ln x - \frac{3}{2} x \right) = 0.$$

Quindi $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = +\infty$$

Quindi a destra non c'è asintoto orizzontale.

Si trova anche

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = +\infty$$

Quindi non esiste asintoto obliquo a destra.

Sappiamo già che la derivata prima è:

$$f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}$$

e che la funzione ha un minimo assoluto per $x = \sqrt{e}$.

Essendo inoltre la derivata seconda $f''(x) = \frac{1}{x}$ sempre positiva nel dominio ($x > 0$), la funzione $f(x)$ è convessa. Riportiamo il grafico in figura 1.

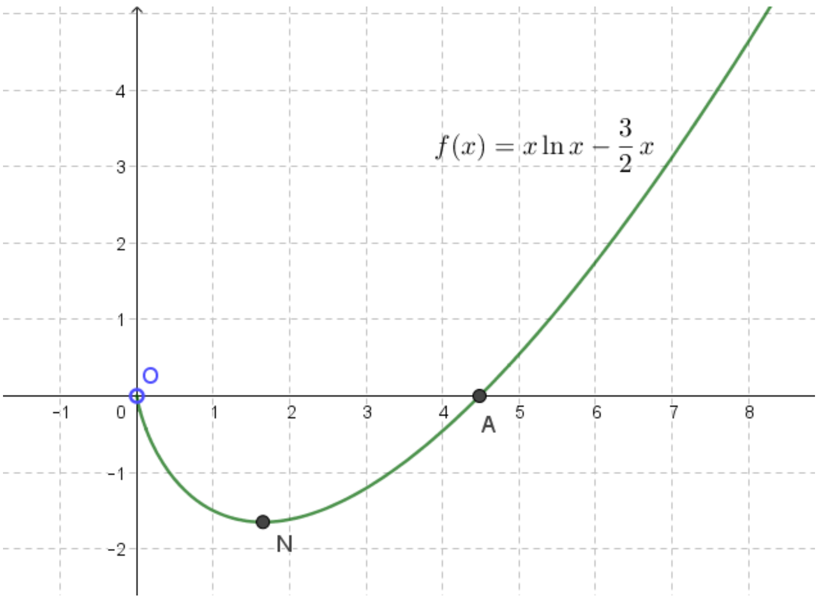

Figura 1

Punto b)

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

Poiché la funzione $f(x)$ è convessa e il punto $Q(0, -1)$ ha ordinata maggiore del minimo assoluto, si può concludere che esiste una sola retta tangente condotta da Q al grafico della funzione e inoltre deve avere pendenza negativa. Tale tangente ha per equazione: $y + 1 = mx$, ossia $y = mx - 1$, che possiamo indicare con $y = t(x)$.

Nel punto di tangenza, si deve avere:

$$\begin{cases} f(x) = t(x) \\ f'(x) = t'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ln x - \dfrac{3}{2}x = mx - 1 \\ \ln x - \dfrac{1}{2} = m \end{cases}$$

Si ottiene pertanto

$$x\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}x = mx - 1$$

$$mx + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = mx - 1$$

che fornisce la soluzione $x = 1$ e il punto di tangenza $T\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Quindi $m = -\frac{1}{2}$ e la retta tangente cercata ha equazione $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (figura 2).

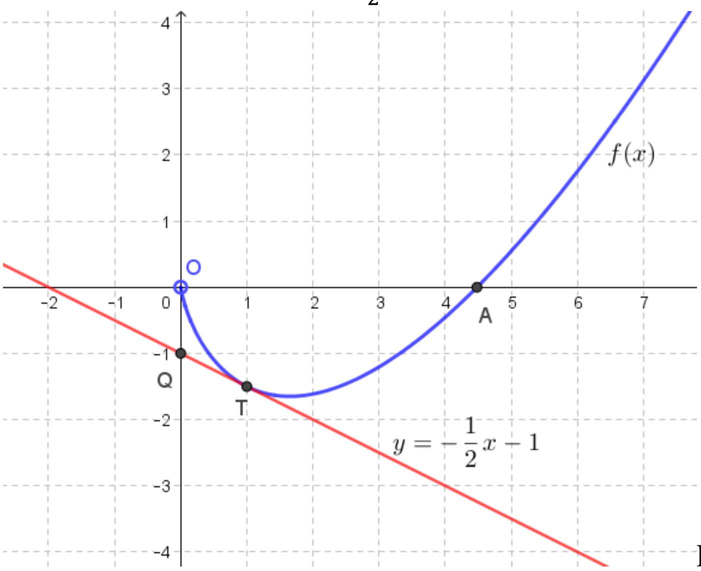

Figura 2

Punto c)

c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

La funzione $g(x) = \frac{x+h}{x+k}$, se $h \neq k$ ha per grafico un'iperbole equilatera traslata di asintoti le rette di equazioni $y = 1$ e $x = -k$, di centro il punto $O'(-k, 1)$. Si ha

$$g'(x) = \frac{k-h}{(x+k)^2}$$

Affinché le due funzioni siano tangenti nel punto di ascissa 1, si devono verificare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = \frac{1+h}{1+k} \\ -\frac{1}{2} = \frac{k-h}{(1+k)^2} \end{cases}$$

Risolvendo si ha

$$\begin{cases} 1+k = -\frac{2}{3}(1+h) \\ -\frac{1}{2} = \frac{k-h}{(1+k)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{3}(5+2h) \\ 5(1+h) = \frac{2}{3}(1+h)^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $h = -1$ (non accettabile, perché si ottiene $k = -1$ e $g(x) = 1$ per ogni $x \neq 1$) e $h = \frac{13}{2}$, che fornisce $k = -6$.

Pertanto la funzione richiesta è

$$g(x) = \frac{x + \frac{13}{2}}{x-6} = \frac{2x+13}{2x-12}.$$

Il grafico è un'iperbole equilatera di asintoti le rette di equazione $x = 6$ e $y = 1$ (figura 3).

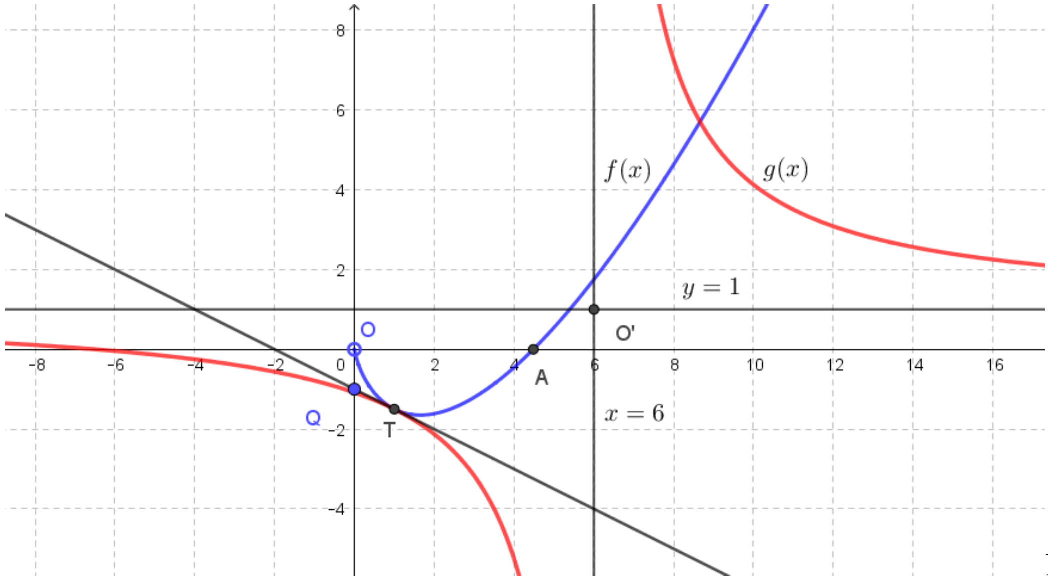

Figura 3

Punto d)

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

Determiniamo l'espressione analitica della funzione $g(x)$. Si ha

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left(t \ln t - \frac{3}{2}t\right) dt.$$

Poiché (mediante integrazione per parti):

$$\int (x \ln x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

si ha:

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left(t \ln t - \frac{3}{2}t\right) dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} - \frac{3t^2}{4}\right]_1^x =$$

$$g(x) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t - t^2\right]_1^x = \frac{x^2}{2}\ln x - x^2 + 1.$$

Questa funzione ha per dominio i numeri reali positivi, ha per derivata prima $f(x)$ e per derivata seconda $f'(x)$.

La funzione ha un punto di discontinuità in $x = 0$ (che comunque non appartiene al dominio della funzione) e si ha

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1.$$

La funzione $g(x)$ non ha asintoti.

Dal segno di $f(x) = g'(x)$ si ricava che $g(x)$ è decrescente per $0 < x < \sqrt{e^3}$ ed è crescente per $x < \sqrt{e^3}$; quindi $x = \sqrt{e^3}$ è un punto di minimo relativo (e assoluto) per la funzione $g(x)$ e il minimo vale $1 - \frac{e^3}{4} \approx -4.02$.

Dal segno di $f'(x) = g''(x)$, si ricava che la funzione $g(x)$ è concava nell'intervallo $0 < x < \sqrt{e}$ ed è convessa per $x > \sqrt{e}$. Quindi $x = \sqrt{e}$ è un punto di flesso ascendente per la funzione $g(x)$. Il punto di flesso ha coordinate $F\left(\sqrt{e}, 1 - \frac{3}{4}e\right)$. Vedi fig. 4 per il grafico di $g(x)$.

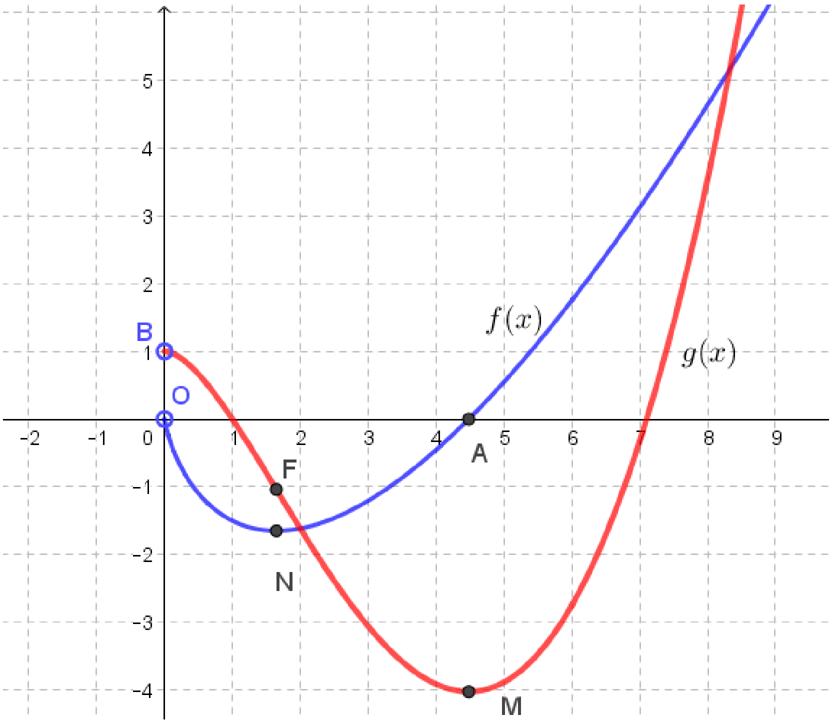

Figura 4

Indicato con P il punto di ascissa $x = e$, l'ordinata di questo punto sarà:

$$g(e) = 1 - \frac{e^2}{2}.$$

La retta tangente in P alla funzione $g(x)$ avrà pendenza

$$m = g'(e) = f(e) = -\frac{e}{2}.$$

La retta tangente in P (figura 5) ha quindi equazione

$$y - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) = -\frac{e}{2}(x - e)$$

ossia

$$y = -\frac{1}{2}ex + 1\,.$$

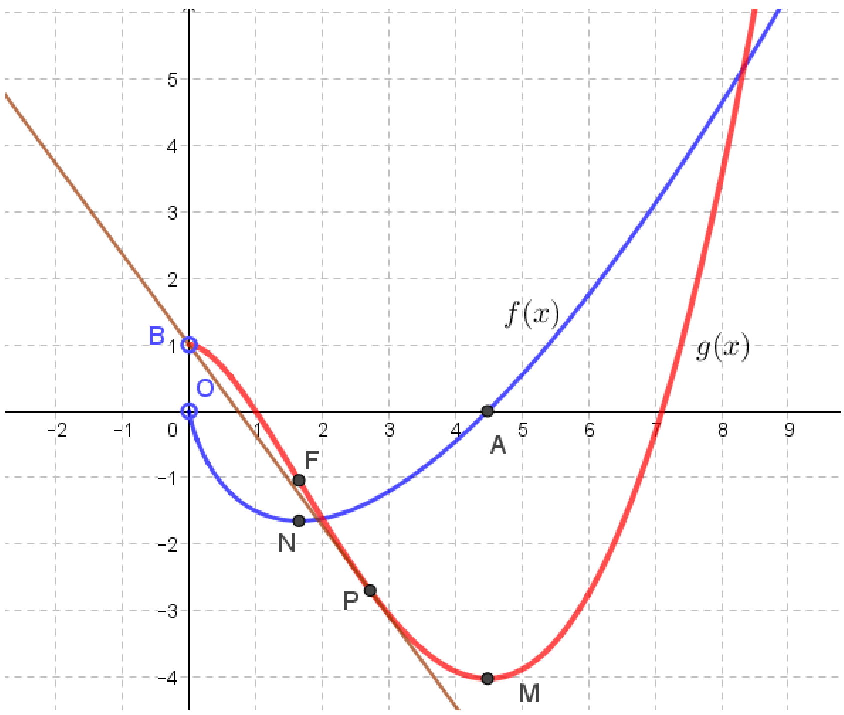

Figura 5