Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica – sessione suppletiva – 6 luglio 2023

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di L. Tomasi

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.

È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$

- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale

- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.

a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

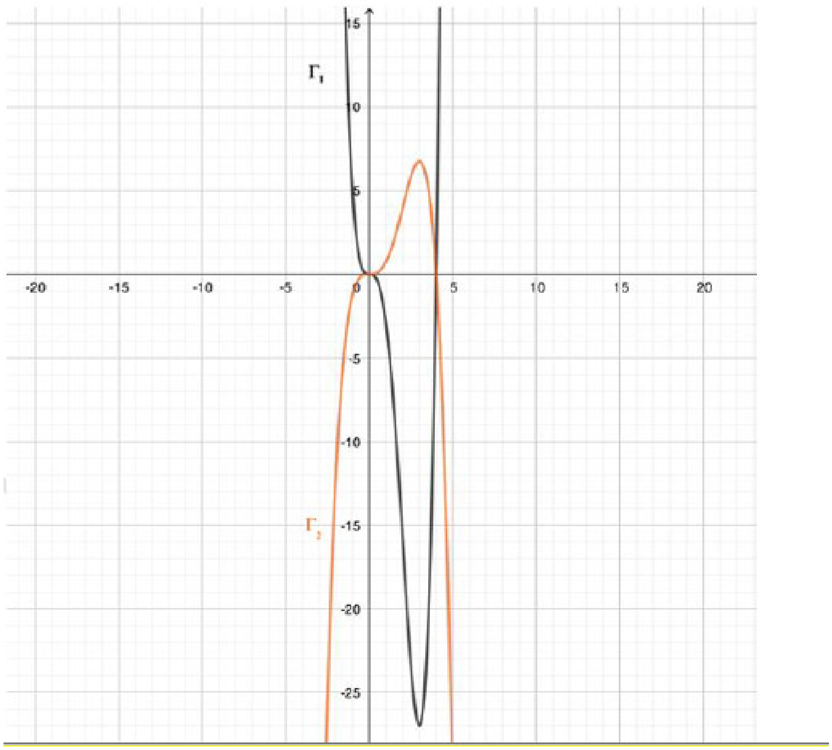
b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4} ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$. Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Soluzione

Punto a)

Poiché $P''(x) = 12x^2 - 24x$, ne segue che

$$P'(x) = \int (12x^2 - 24x)\, dx = 4x^3 - 12x^2 + c$$

e

$$P(x) = \int (4x^3 - 12x^2 + c)\, dx = x^4 - 4x^3 + cx + d\,.$$

Poiché per ipotesi si ha

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \end{cases}$$

si ricava

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$$

è una funzione polinomiale che nell'origine ha un flesso con tangente orizzontale e interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = 4$ (figura 1) ed ha un minimo (assoluto) nel punto $x = 3$ che vale -27.

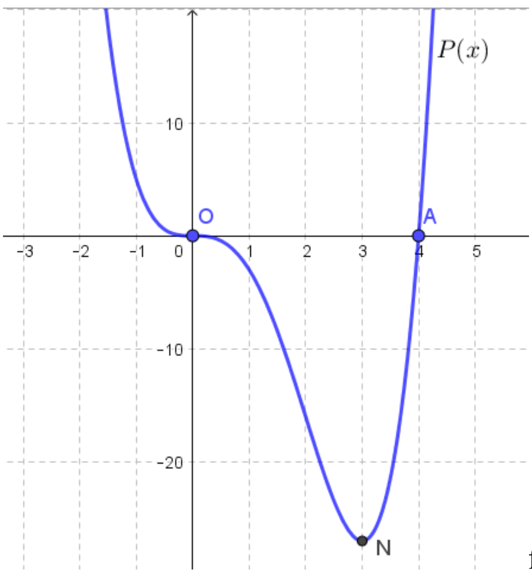


figura 1

Poiché deve essere

$$Q(x) = k(x^4 - 4x^3)$$

funzione che deve avere un massimo di 27/4, ricaviamo la derivata prima

$$Q'(x) = k(4x^3 - 12x^2) = \ 4kx^2(x-3).$$

Ne segue che $x = 3$ sarà un punto di massimo se $k < 0$ e il massimo sarà $Q(3) = -27k$.
Poiché sappiamo che il massimo relativo deve essere 27/4, ne segue

$$-27k = \frac{27}{4}$$

e quindi $k = -\frac{1}{4}$; pertanto:

$$Q(x) = -\frac{1}{4}P(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3) = -\frac{1}{4}x^3(x-4).$$

Ovviamente anche $Q(x)$ ha un flesso con tangente orizzontale nell'origine, interseca l'asse delle ascisse in $x = 4$ ed ha un massimo in $x = 3$ (figura 2).

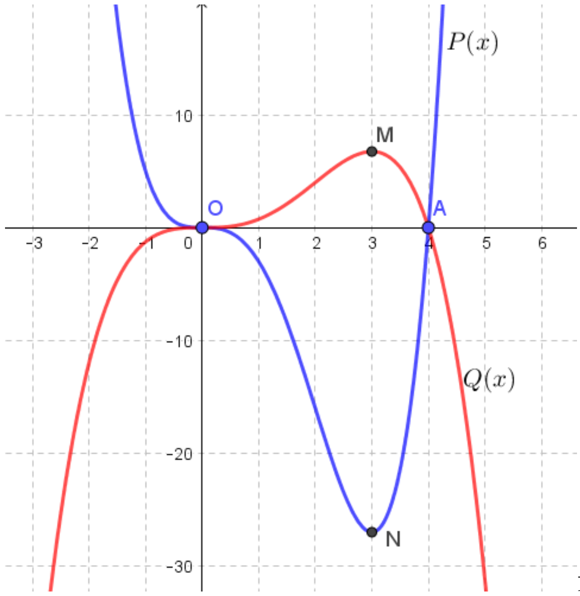


figura 2

Punto b)

b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

Funzione $y = P(x) \cdot Q(x)$

Indichiamo con $f(x)$ la funzione polinomiale definita da $y = P(x) \cdot Q(x)$. Si ottiene:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3)^2 \,.$$

Si ha $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con gli stessi zeri di $P(x)$. La funzione si può anche scrivere nel seguente modo:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^6(x-4)^2$$

Quindi $x = 0$ ha molteplicità 6 e $x = 4$ ha molteplicità 2; si tratta quindi di due punti di massimo.
La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3)(4x^3 - 12x^2) = -2x^5(x-4)(x-3) == -2x^5(x^2 - 7x + 12)$$

che è positiva per $x < 0$ e nell'intervallo $3 < x < 4$, negativa o nulla negli altri punti del dominio. Quindi $x = 0$ e $x = 4$ sono punti di massimo, mentre $x = 3$ è un punto di minimo relativo, in cui il minimo vale $-\frac{729}{4}$.
La derivata seconda è:

$$f''(x) = -2(5x^4(x^2 - 7x + 12) + x^5(2x - 7))$$

$$f''(x) = -2x^4(5(x^2 - 7x + 12) + x(2x - 7))$$

$$f''(x) = -2x^4(7x^2 - 42x + 60)$$

La derivata seconda si annulla in $x = 0$ (che è un massimo) e nei punti $x = 3 \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$, che sono due punti di flesso, $x = 3 - \sqrt{\frac{3}{7}}$ ascendente e $x = 3 + \sqrt{\frac{3}{7}}$ discendente.

Quindi $f(x)$ è convessa nell'intervallo tra i due punti di flesso ed è concava altrove (figura 3, dove indichiamo con N il punto di minimo relativo , con O e M i punti di massimo e con F_1 ed F_2 i due flessi).

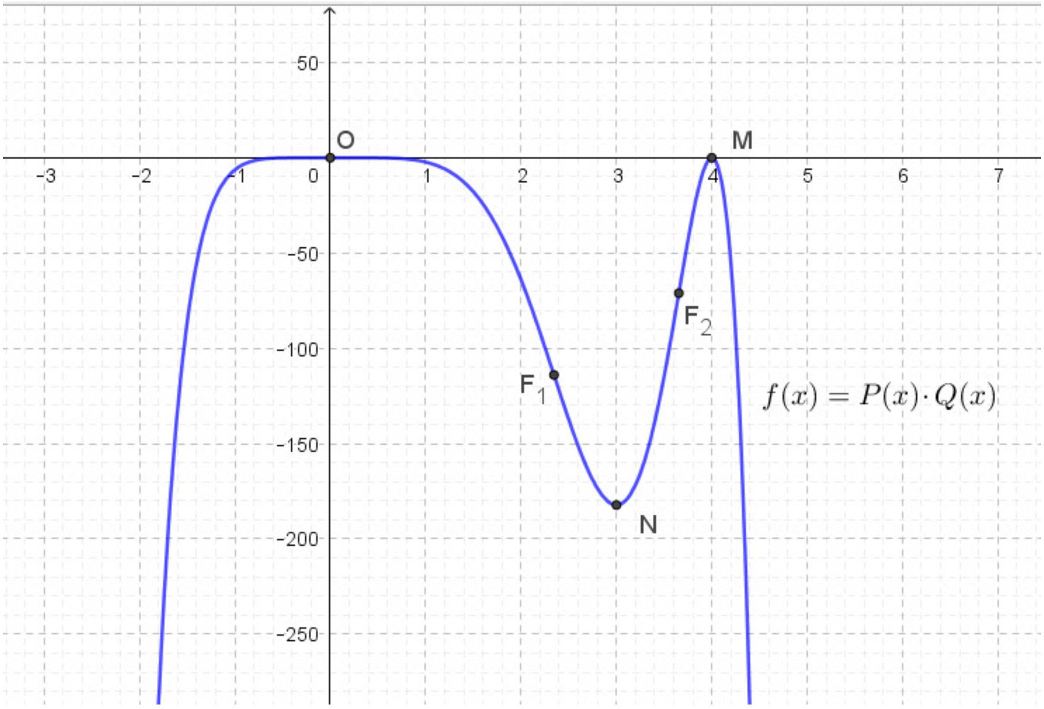


figura 3

Funzione $y = \frac{1}{P(x)}$

Indichiamo con $g(x)$ la funzione definita da $y = \frac{1}{P(x)}$:

$$g(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3} = x^{-3}(x-4)^{-1} .$$

La funzione $g(x)$ ha come dominio $\mathbb{R}\backslash\{0, 4\}$. I punti esclusi dal dominio danno origine a due asintoti verticali, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = 4$ che nella (discutibile e tradizionale) classificazione diventano punti di discontinuità di "seconda specie". La funzione è negativa nell'intervallo (0, 4); è positiva per $x < 0$ e per $x > 4$. L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.

La derivata prima è:

$$g'(x) = -\frac{4x^3 - 12x^2}{(x^4 - 4x^3)^2} = -\frac{4(x-3)}{x^4(x-4)^2} = 4(x-3)\, x^{-4}(x-4)^{-2}$$

che ha lo stesso dominio della $g(x)$.

La $g'(x)$ è positiva per $x < 0$ e per $0 < x < 3$; è negativa per $3 < x < 4$ e $x > 4$. Quindi $x = 3$ è un punto di massimo relativo e il massimo vale $g(3) = -\frac{1}{27}$.

La derivata seconda è:

$$g''(x) = \frac{4(5x^2 - 30x + 48)}{x^5(x-4)^3}$$

che non si annulla nel dominio della funzione, che è lo stesso della $g''(x)$.
La $g''(x)$ è negativa nell'intervallo (0, 4) ed è positiva negli altri punti del suo dominio. Quindi la funzione $g(x)$ è concava nell'intervallo (0,4) e convessa negli altri intervalli del suo dominio (figura 4).

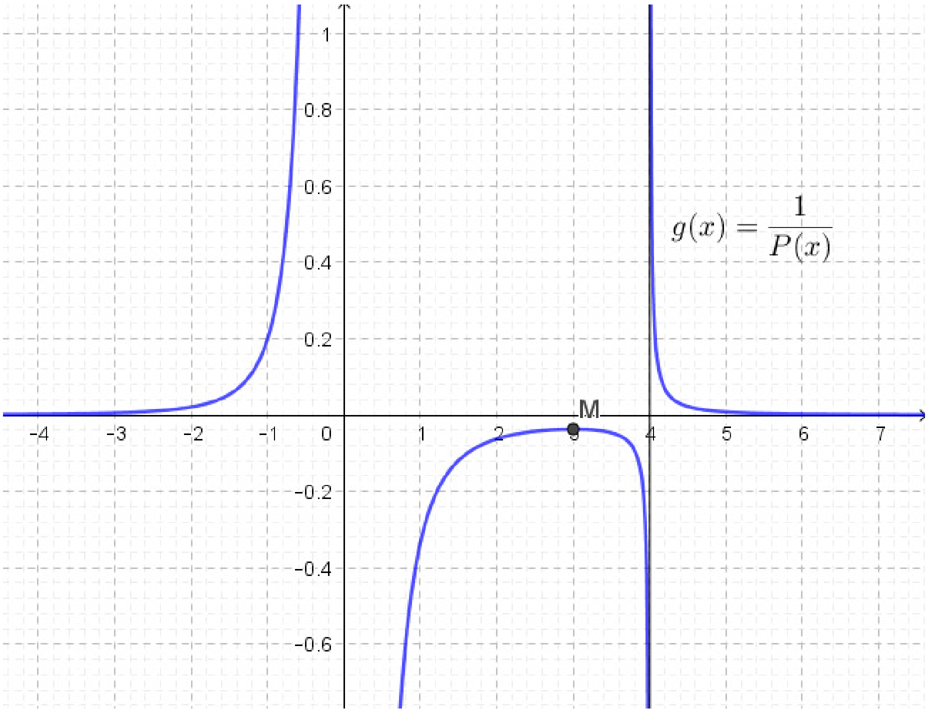


Figura 4

Punto c)

c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

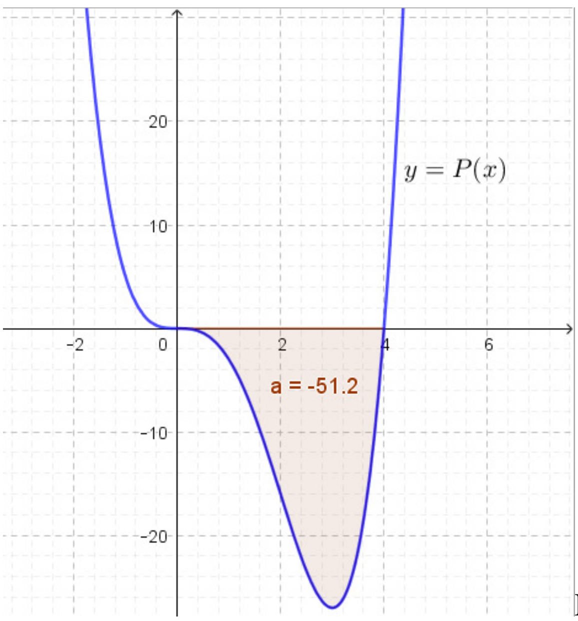


Figura 5

L'area S richiesta è rappresentata dal seguente integrale definito (calcolato tra $x = 0$ e $x = 4$):

$$S = Area(R) = -\int_0^4 (x^4 - 4x^3)dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^4\right]_0^4 = -\frac{1024}{5} + 256 = \frac{256}{5}.$$

Punto d)

d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4} ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$. Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Per verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{x^4 - 4x^3} = \frac{1}{x^2 - 4x}$$

basta eseguire la derivata; si ha:

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x-4} \cdot \frac{4}{x^2} = \frac{1}{x^2 - 4x}.$$

Per $t \geq 5$, calcoliamo l'integrale

$$I(t) = \int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)\right]_5^t =$$

$$I(t) = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t-4}{t}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5t-20}{t}\right).$$

Calcolando il limite richiesto, si ha

$$\int_5^{+\infty} \frac{x^2}{P(x)} dx = \lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5t-20}{t}\right) = \frac{1}{4}\ln 5 = \ln\sqrt[4]{5}\,.$$

Il significato geometrico è indicato nella figura 6 in cui si osserva che l'area "sotto" la $f(x)$ calcolata da $x = 5$ a $x = t$ $(t \geq 5)$ tende all'asintoto $y = \ln\sqrt[4]{5}$ per $t \dashrightarrow +\infty$.

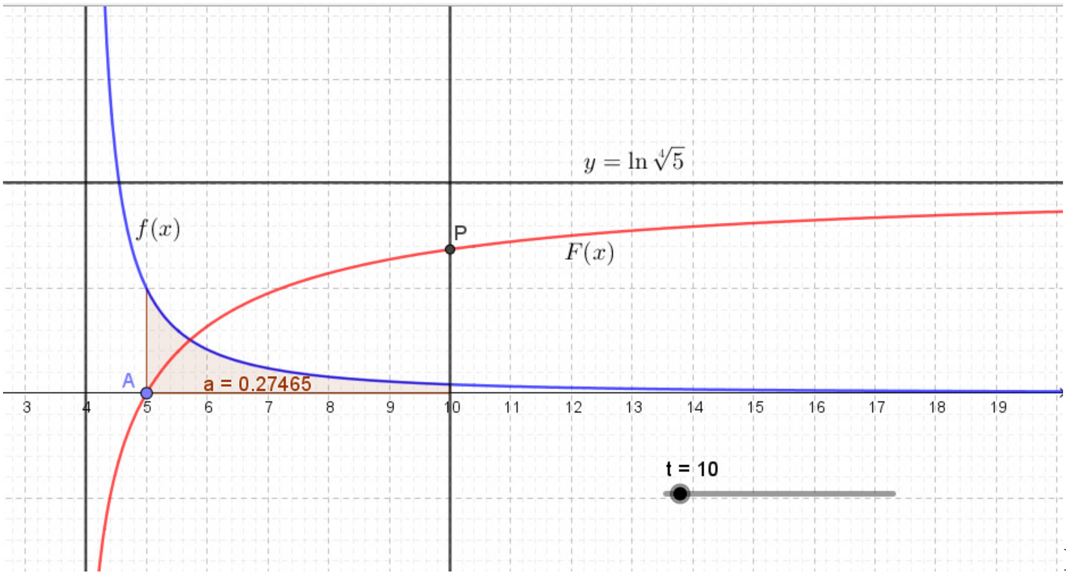


Figura 6