Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica – sessione suppletiva – 6 luglio 2023

QUESTIONARIO - soluzione a cura di L. Tomasi

QUESITO 1

Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G" i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento G'G" è parallelo a BC.

Soluzione

Con riferimento alla figura 1, dove abbiamo indicato con M' il punto medio del segmento BP e con M'' il punto medio del segmento PC, con G' il baricentro del triangolo ABP e con G'' il baricentro del triangolo APC, possiamo scrivere la proporzione:

$$M'G' : G'A = M''G'' : G''A = 1:2$$

per una nota proprietà del baricentro di un triangolo.

In base al teorema, che costituisce una sorta di "inverso del teorema di Talete" (vedi nota qui sotto), applicato al triangolo $AM'M''$ e alla retta che congiunge G' con G'', poiché questa suddivide i lati AM' e AM'' nel medesimo rapporto, possiamo affermare che $G'G''//BC$.

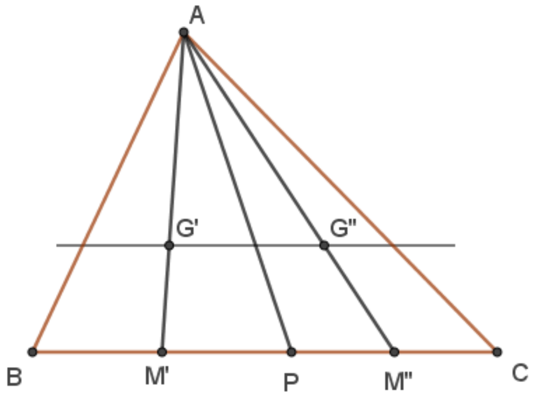

figura 1

[Nota. Il teorema di Talete non è invertibile in generale. Esiste un inverso "parziale" che ha come caso particolare il teorema che abbiamo utilizzato per ricavare la tesi].

QUESITO 2

2. Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

Soluzione

La probabilità di ottenere tre volte 5 in 8 lanci è

$$p(E_1) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 56 \cdot \frac{1}{212} \cdot \frac{3125}{7776} = \frac{21875}{209952} \approx 0.104 \approx 10{,}4\%$$

La probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta nell'ottavo lancio è il prodotto della probabilità di ottenere esattamente due volte la faccia "5" nei primi 7 lanci, moltiplicata per la probabilità di avere un "5" nell'ottavo lancia:

$$p(E_2) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \mathbf{\frac{1}{6}} = 21 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{3125}{7776} \cdot \frac{1}{6} = \frac{21875}{589872} \approx 0.03907 \approx 4\%$$

QUESITO 3

3. Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

Soluzione

Un vettore ortogonale al piano dato è

$$\vec{v} = < 3,4,-5 > .$$

La retta passante per *P* e ortogonale al piano, ha per equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} .$$

I punti di tale retta che hanno distanza da *P* uguale al raggio si trovano imponendo che sia:

$$\sqrt{(3t)^2 + (4t)^2 + (-5t)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$9t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 50$$

che risolta fornisce: $t = \pm 1$.

Quindi le coordinate dei centri delle due superfici sferiche sono $C_1(2,6,-2)$ e $C_2(-4,-2,8)$.

Le equazioni cartesiane delle superfici sferiche richieste (figura 2) sono pertanto

$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 50$ e $(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-8)^2 = 50$,

ossia

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 4z - 6 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 16z + 34 = 0$.

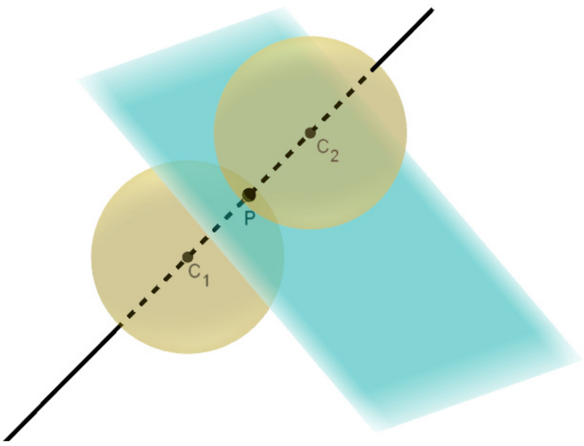

figura 2

QUESITO 4

4. Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

Soluzione

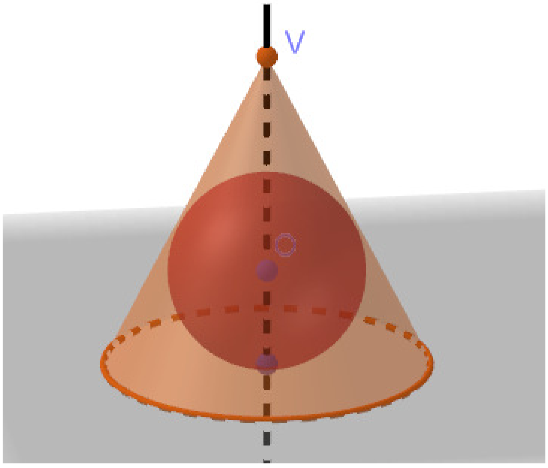

figura 3

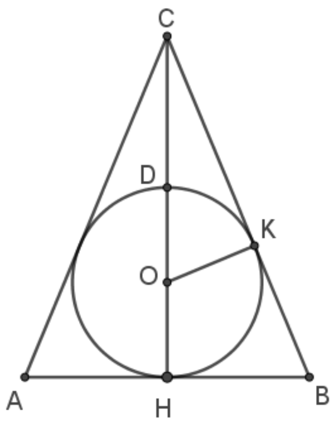

figura 4

[Assumiamo che il cono sia *circolare retto*, anche se il testo non lo dice].

Soluzione (con l'uso delle derivate)

Poniamo $OH = r$ e $OC = x$. Si ha $x > r$.

Quindi l'altezza del cono è $HC = x + r$.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli HBC e KOC (figura 4) segue la proporzione

$$HB : HC = OK : KC$$

ossia

$$HB : (x + r) = r : \sqrt{x^2 - r^2}$$

che fornisce

$$HB = r\sqrt{\frac{x + r}{x - r}}.$$

Quindi il volume del cono è

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}\right)^2 (x+r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)^2}{x-r}.$$

Il volume del cono è minimo se e solo se è minima la funzione ($x > r$):

$$f(x) = \frac{(x+r)^2}{x-r}.$$

Il grafico di questa funzione è un ramo di iperbole non equilatera, di asintoti le rette di equazioni $x = r$ e $y = x + 3r$, che ha il minimo per $x = 3r$ (vedi figura 5, dove si è posto $r = 1$).

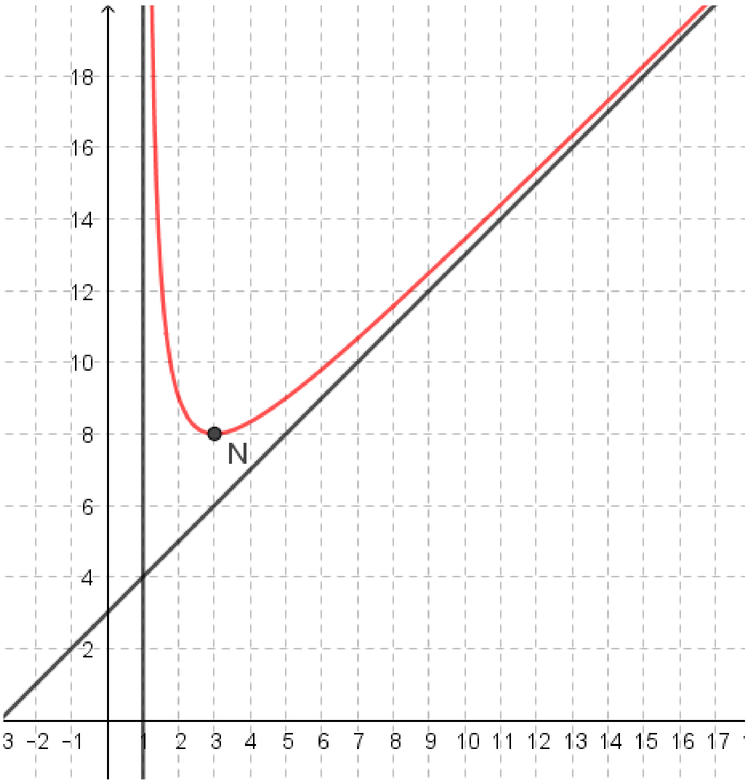

figura 5

Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}.$$

Studiandone il segno si ottiene il punto di minimo che è $x = 3r$ ($x > r$), in base al quale il segmento richiesto è

$$CD = x - r = 3r - r = 2r$$

e il volume minimo del cono è

$$V(3r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(4r)^2}{2r} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Soluzione con metodo elementare (senza l'uso delle derivate)

$$f(x) = \frac{(x+r)^2}{x-r}.$$

Eseguendo la divisione si ottiene

$$f(x) = x + 3r + \frac{4r^2}{x-r}$$

che si può scrivere

$$f(x) = x - r + \frac{4r^2}{x - r} + 4r$$

Trascurando in questa somma $4r$ che è costante, ci limitiamo a trovare il minimo di

$$s(x) = x - r + \frac{4r^2}{x - r}$$

in cui i due addendi (positivi) hanno prodotto costante.
Il minimo si ha quando - se possibile - i due addendi sono uguali:

$$x - r = \frac{4r^2}{x - r}.$$

Si ottiene l'equazione

$$x^2 - 2rx - 3r^2 = 0$$

che ha per soluzioni $x = -r$ (non accettabile) e $x = 3r$, cui corrisponde il valore minimo del volume del cono e la misura del segmento $CD = x - r = 3r - r = 2r$.

QUESITO 5

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

Soluzione

Poniamo $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^3 + kx$.
Indicata con $x = \alpha$ l'ascissa di un eventuale punto di tangenza tra la retta e una cubica del fascio dato, si deve avere

$$\begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 2 = \alpha^3 + k\alpha \\ 1 = 3\alpha^2 + k \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \alpha - 2 = \alpha^3 + k\alpha \\ k = 1 - 3\alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 2 = \alpha^3 + (1 - 3\alpha^2)\alpha \\ k = 1 - 3\alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^3 = 1 \\ k = 1 - 3\alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

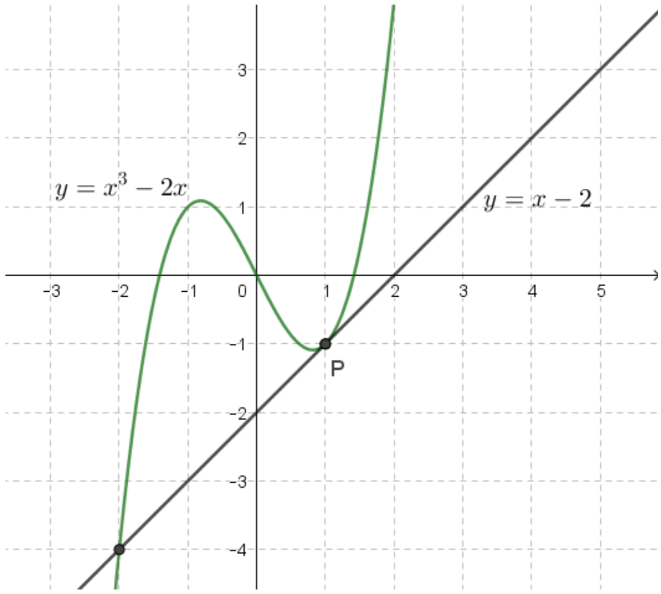

figura 6

Quindi si ottiene la cubica $y = x^3 - 2x$ (funzione dispari), che è tangente nel punto $P(1, -1)$ alla retta di equazione $y = x - 2$.

QUESITO 6

6. Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

Una funzione polinomiale che verifichi alle richieste deve avere come soluzione doppia $x = 0$ oppure (in alternativa) $x = 3$.
Pertanto dovrà avere equazione del tipo

$$y = ax^2(x - 3)$$

oppure

$$y = bx(x - 3)^2 .$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1, -4)$, nel primo caso si ottiene $a = 2$ e la funzione cubica (figura 7):

$$y = 2x^2(x - 3)$$

e nel secondo caso si ha $b = -1$ e la funzione cubica (figura 8):

$$y = -x(x - 3)^2 .$$

Nel primo caso l'area richiesta è data da

$$S_1 = -\int_0^3 2x^2(x - 3)dx = 2\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \frac{27}{2};$$

nel secondo caso si ha

$$S_2 = -\int_0^3 -x(x - 3)^2 dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \frac{27}{4}.$$

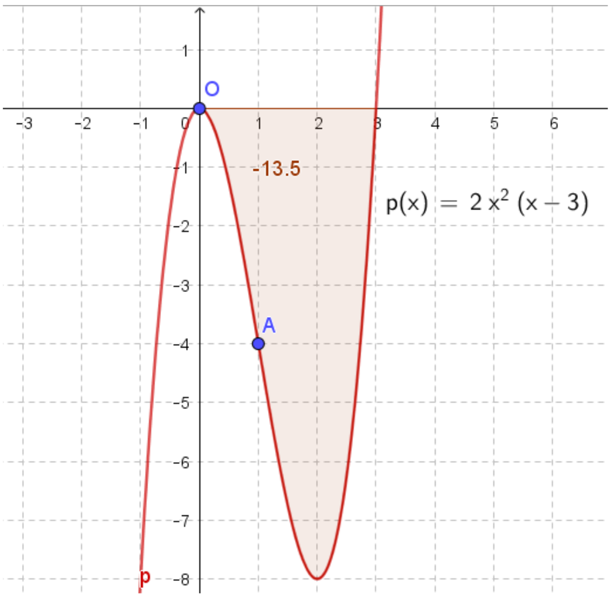

figura 7

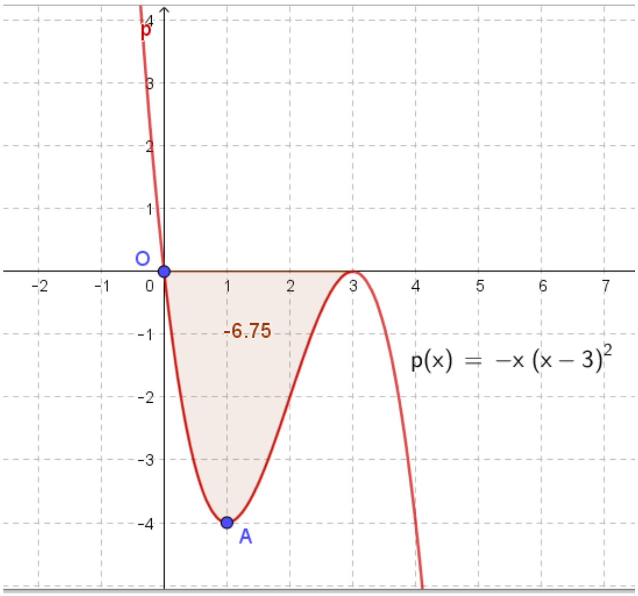

figura 8

QUESITO 7

7. Calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}dt}{(x-1)^2}$$

Soluzione

Poiché ricorrono le ipotesi, possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital per la forma indeterminata ("0/0"), forma in cui si presenta questo limite.

Controlliamo se vale l'ultima ipotesi del teorema di De l'Hôpital, calcolando il seguente limite, dove abbiamo indicato con $f'(x)$ e $g'(x)$ rispettivamente le derivate prime del numeratore e del denominatore della funzione data:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)e^{2x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)e^{2x}}{2}=e^2.$$

Di conseguenza il limite dato vale e^2.

QUESITO 8

8. Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a,b). Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0\in(a,b)$" e B: "$\exists\, x_0\in(a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a,b).

   1. $A\Longrightarrow B$
   2. $B\Longrightarrow A$
   3. $A\Longleftrightarrow B$
   4. $B\Longleftrightarrow A$

   Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

Soluzione
Dal testo si ricava che l'intervallo (a, b) è aperto [sarebbe stato meglio precisarlo…].
Solo la prima implicazione è corretta. La prima proposizione costituisce un teorema che a volte viene chiamato "teorema di Fermat".
La seconda è falsa, perché x_0 potrebbe essere un punto di flesso con la retta tangente parallela all'asse delle *x*.
Poiché la seconda implicazione è falsa, ne consegue che anche la terza è falsa. La quarta è equivalente alla terza e quindi è falsa anch'essa.