

L'insegnamento della matematica e i sistemi di geometria dinamica, con riferimento a *Cabri II Plus* e a *Cabri 3D*

Luigi Tomasi

Liceo Scientifico "P. Paleocapa" Rovigo - Università di Ferrara

luigi.tomasi@unife.it

1. Introduzione

Uno dei processi che negli ultimi venti anni hanno investito la scuola secondaria superiore, accanto ad altri notevoli cambiamenti, è stato quello della diffusione delle tecnologie informatiche. Per l'insegnamento della matematica questo è avvenuto soprattutto in seguito dell'adozione dei programmi sperimentali del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica (1985, 1992, rivisti nel 1996 per i trienni dei licei) e di quelli elaborati dalla Commissione presieduta da B. Brocca (1991). Questi programmi hanno esercitato una notevole azione di rinnovamento dell'insegnamento della matematica.

"I programmi PNI ebbero una grande azione dirompente. La matematica insegnata in quel momento nelle scuole liceali era del 1945, ma di fatto risaliva alla Riforma Gentile; quella delle scuole tecniche era per lo più del 1961 e dello stesso tenore. I programmi degli indirizzi attivati successivamente o riformati, tranne qualche lodevole eccezione, presentavano lo stesso piatto panorama. Contenuti e metodologie erano sempre quelli tradizionali: la prassi che si era consolidata aveva ulteriormente peggiorato la situazione. ... Certamente [con il PNI] l'informatica, bene o male, è entrata in tutte le scuole secondarie ed argomenti nuovi, come la logica, la probabilità e la statistica sono divenuti familiari a molti. Forse i programmi non sempre sono stati attuati con l'intento metodologico che li aveva ispirati e che mirava a costruire nelle menti dei ragazzi il significato degli "oggetti" matematici più che a travasare contenuti, ma il cambiamento richiesto era a 180° e ciò non è di tutti e non è rapido." (Lucia Ciarrapico, in *Archimede*, n. 2/2002).

Gli strumenti informatici dovevano quindi consentire un rinnovamento sia dei contenuti matematici che della metodologia con i quali venivano proposti. Inizialmente, nel PNI, l'accento era stato posto sull'apprendimento di un linguaggio di programmazione. Gradualmente però, anche in conseguenza della rapida obsolescenza del linguaggio *Pascal* – allora utilizzato- il tempo dedicato allo studio di un linguaggio di programmazione è stato drasticamente ridimensionato e si sono diffusi software di "geometria dinamica" come *Cabri Géomètre*, di "manipolazione simbolica" come *Derive*, l'uso di calcolatrici simbolico-grafiche oltre a software di tipo generale, come i fogli elettronici, utilizzati per l'insegnamento della matematica. La diffusione della rete Internet, avvenuta nella seconda metà degli anni Novanta, ha aperto inoltre altre imprevedibili possibilità. Nel giro di un ventennio si è assistito ad un'autentica rivoluzione anche nella scuola oltre che in altri settori della società. I software a disposizione, l'hardware e le potenzialità della rete si sono moltiplicati e gli insegnanti sono sempre più in difficoltà a seguire tutti questi rapidissimi cambiamenti.

Il software che ha avuto il maggiore impatto sull'insegnamento della matematica è senz'altro *Cabri Géomètre*, realizzato in Francia nel 1988, presso l'Università Joseph Fourier di Grenoble, da una collaborazione tra informatici, matematici ed esperti di didattica della matematica. Inizialmente sviluppato in ambiente Macintosh, e più tardi anche in ambiente

MS-DOS e Windows oltre che su alcune calcolatrici grafiche, è attualmente il software di geometria dinamica più diffuso nelle scuole in Italia e nel mondo. Sfrutta fin dalla sua nascita la manipolazione diretta tramite il mouse e un'interfaccia grafica e intuitiva. Queste caratteristiche, nate in ambiente Macintosh, saranno poi destinate a conquistare il mondo dell'informatica, dei sistemi operativi e di quasi tutti i software. L'obiettivo iniziale di chi ha progettato *Cabri* era di creare un ambiente che aiutasse l'apprendimento e l'esplorazione della geometria piana. Uno dei punti di forza di *Cabri* sta nei suoi solidi fondamenti matematici. Molte delle innovazioni che sono state progressivamente introdotte nel software sono state suggerite dagli stessi insegnanti che hanno utilizzato *Cabri* in classe. La prima versione di *Cabri* è stata tradotta in italiano nel 1993 (trad. di Paolo Boieri) ed ha avuto una notevole diffusione nella scuola secondaria.

L'ambiente *Cabri Gèomètre* permette di costruire per mezzo di operatori (primitive di costruzione) degli oggetti geometrici facendo intervenire delle relazioni tra gli oggetti stessi. Essi hanno un modo di utilizzazione che rende il loro comportamento simile a quello che questi oggetti hanno nella geometria euclidea. L'utente costruisce sullo schermo del computer un disegno e gli dà delle specifiche geometriche tramite la manipolazione diretta e con l'aiuto di strumenti contenuti in menu "a tendina". Le proprietà che rimangono invarianti nella figura sono individuate tramite il trascinamento degli elementi grafici della figura con il mouse. Le figure create quindi non rappresentano una sola configurazione, ma potenzialmente si riferiscono a un'intera classe di disegni equivalenti. Le ragioni della diffusione di questo software sono ben note a chiunque abbia usato *Cabri* anche poche volte:

- la manipolazione diretta delle figure come base per l'apprendimento di fatti geometrici.
- la dinamicità delle figure e la facilità di interazione con esse.
- l'uso semplice e intuitivo: non ci sono complicazioni informatiche per il suo uso.
- *Cabri* "si comporta" nel suo funzionamento come ci si aspetta si comporti da un punto di vista matematico; in esso è incorporata una "logica di funzionamento" che è la stessa della geometria.

Accanto a *Cabri* occorre almeno ricordare il software *The Geometer's Sketchpad*, più o meno coetaneo di *Cabri*, diffuso soprattutto negli USA, Canada e in Gran Bretagna. Entrambi i software citati hanno un forte orientamento alla didattica e sono stati progettati per favorire il massimo dell'interattività e della facilità d'uso, per utenti sia principianti che esperti. Possono infatti essere usati dalla scuola primaria all'università. Queste caratteristiche fanno in modo che questi software si possano definire di "geometria dinamica".

Negli ultimi anni sono nati decine di altri software di geometria, alcuni dei quali progettati in linguaggio Java (*Cinderella*, *Compass and Ruler*, *GeoGebra*, ...) –uno dei linguaggi di programmazione della rete- oppure in ambiente Linux (*Dr.Geo*,...). Questi software, con caratteristiche non sempre paragonabili tra loro, non hanno attualmente la stessa diffusione nella scuola di *Cabri* e di *The Geometer's Sketchpad*.

È infine da citare, per quanto riguarda i sistemi di geometria dinamica, la recente uscita (nel Convegno Internazionale CabriWorld, Roma 2004) del software *Cabri 3D*, ideato per l'insegnamento della geometria dello spazio.

La costruzione di figure geometriche al computer con un software di geometria dinamica apporta una dimensione del tutto nuova rispetto alle costruzioni classiche che utilizzano carta, matita, riga e compasso. L'allievo può lavorare sulla figura ed esaminare tanti casi particolari.

In ogni momento si può cambiare la costruzione, si possono formulare delle congetture, tornare indietro o rifare. Le costruzioni che si possono eseguire con questi software assumono immediatamente un aspetto dinamico che precedentemente si poteva ottenere solo faticosamente, utilizzando dei modelli fisici e delle “macchine matematiche”.

È opinione comune di chi si occupa di didattica della matematica che i software di geometria dinamica, se usati in modo opportuno, favoriscano un tipo di apprendimento più attivo e possano migliorare la motivazione degli allievi verso la geometria e in generale per la matematica. Il software permette di sviluppare alcune fondamentali abilità dell'apprendimento matematico (intuire, congetturare, argomentare, dedurre, ...) in modo diverso rispetto a quanto si faceva solo qualche anno fa. L'uso del software permette di esplorare molte situazioni concrete relative ad un'unica configurazione. Una tale ricchezza di “esperienze” sulla figura, impossibile con il solo uso degli strumenti tradizionali, rende particolarmente interessanti questi sistemi dal punto di vista didattico.

Si può dire che con i software di geometria dinamica cambia la stessa nozione di figura geometrica, che da statica si trasforma in dinamica. In particolare questi software sono dei veri e propri “micromondi”, che permettono di esplorare proprietà, indagare sulle figure, formulare delle congetture e metterle alla prova per mezzo delle stesse funzioni presenti nel software.

2. Percorsi didattici con i software di geometria dinamica

Il software di geometria dinamica può essere usato a diversi livelli di scuola e in vari modi. Si è sperimentato che una delle utilizzazioni più significative è possibile in tutta la scuola secondaria, in particolare nel biennio iniziale della scuola secondaria superiore. In questi livelli scolari lo strumento software può essere efficace per affrontare in modo diverso:

- problemi di costruzione (sono molto legati al disegno e alle classiche costruzioni “con riga e compasso”);
- problemi di “esplorazione” di proprietà e formulazione di congetture;
- problemi presentati in forma “aperta”, come avvio alla dimostrazione (dalla congetture alla dimostrazioni).

Con l'uso di questi software gli insegnanti possono proporre, in alternativa a lezioni di tipo “frontale”, anche lezioni in laboratorio, di *problem solving*, di lavoro di gruppo, attività di scoperta guidata, in cui è lo stesso allievo ad esercitare un ruolo attivo nell'apprendimento. Il software permette un'interazione molto ricca, dal punto di vista dell'apprendimento, con le figure geometriche. Le proprietà vengono visualizzate in modo dinamico, con la possibilità di tenere sotto controllo visivo la figura e le sue variazioni. Per queste ultime attività è opportuno, ad esempio, preparare delle schede di lavoro per gli allievi, assegnando un ruolo particolare alla discussione in laboratorio, seguita da momenti di sistemazione teorica. Questo tipo di proposta di lavoro si può anche ritrovare nei nuovi curricula di matematica elaborati da una Commissione nominata dall'Unione Matematica Italiana (vedi i volumi *Matematica 2001* e *Matematica 2003* nel sito dell'UMI: www.dm.unibo.it/umi/).

Si riportano qui di seguito alcune esemplificazioni di problemi che possono essere presentati adottando preferibilmente una metodologia di lavoro che possiamo chiamare di “laboratorio di matematica”.

Alcuni esempi di problemi di costruzione sono i seguenti:

- Costruire un triangolo equilatero di lato dato.
- Costruire un quadrato di lato dato.
- Dividere un segmento in n parti uguali.
- Costruire un triangolo equilatero di altezza data.
- Data una circonferenza e un punto P , disegnare le rette tangenti per P alla circonferenza data.
- Dato un rettangolo, costruire un quadrato equivalente.
- Il problema del foglio A4: costruire un rettangolo, che sia simile alla sua metà (figura 1).
- Costruire la sezione aurea di un segmento.
- Date due circonferenze nel piano, costruire le rette tangenti comuni.

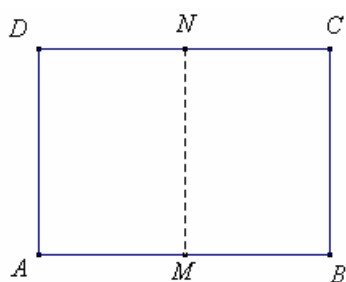


Figura 1

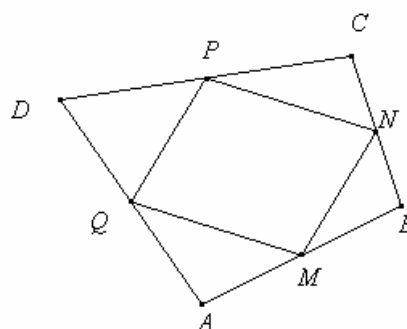


Figura 2

Alcuni problemi di esplorazione (produzione di congetture):

- Dato un qualsiasi quadrilatero $ABCD$ e i punti medi dei lati M, N, P, Q , dire qual è la natura del quadrilatero $MNPQ$ (figura 2).
- Dato un triangolo ABC , si traccino le altezze, le mediane e gli assi. Sia G il punto di incontro delle mediane, H il punto di incontro delle altezze (o dei loro prolungamenti) e O il punto di incontro degli assi. Esaminare se c'è qualche relazione tra H, G e O .
- Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Le bisettrici degli angoli interni A, B, C e D incontrano la circonferenza rispettivamente in S, P, Q e R . Di che natura è il quadrilatero $SPQR$? Quale relazione intercorre fra le diagonali dei due quadrilateri? (dalla rubrica *Flatlandia*: www.unife.it/progetti/fardicono/flatlandia).

Tra le caratteristiche importanti presenti solo in alcuni software di geometria dinamica (in *Cabri Géomètre* fin dalla versione iniziale, e ora anche in *Compass and Ruler*), vi è la possibilità di creare delle “macro-costruzioni”, ovvero di salvare non solo una figura, ma anche il suo procedimento costruttivo. Le macro permettono la creazione di nuovi strumenti che funzionano esattamente come gli altri strumenti disponibili nel software e si aggiungono al menu. Questa caratteristica ha notevole interesse dal punto di vista didattico perché permette un approccio costruttivo alla geometria, oltre alla possibilità di “programmare” e adattare il software ad una particolare situazione didattica.

3. Le trasformazioni geometriche

Accanto ai temi richiamati in precedenza, il software di geometria si può dire sia nato appositamente per presentare dei problemi che possono essere risolti con l'uso delle trasformazioni geometriche, uno dei temi introdotti nei programmi sperimentali di Matematica. Ad esempio, in *Cabri*, è presente una casella di strumenti dedicata alle trasformazioni geometriche del piano (isometrie, omotetia e inversione circolare). Con l'uso delle macro è possibile costruire anche altre trasformazioni, come le affinità e le proiettività.

Tra i tanti che potrebbero essere presentati, proponiamo la discussione didattica di questo problema adatto alla scuola secondaria superiore. Il problema è diviso in due parti tra loro collegate:

- a) Dato un qualunque triangolo ABC , siano P e Q i centri dei quadrati costruiti su AB e AC , rispettivamente (figura 3). Mostrare che, se M è il punto medio di BC , allora il triangolo MPQ è rettangolo e isoscele.
- b) Siano P , Q , R i centri dei quadrati costruiti rispettivamente sui lati BC , CA , AB di un triangolo ABC (figura 4). Dimostrare che AP e QR sono isometrici e perpendicolari tra loro.

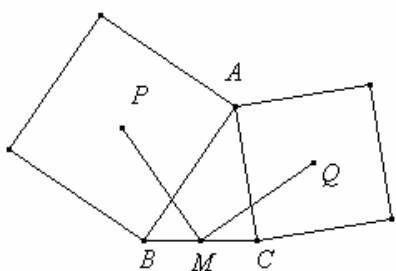


Figura 3

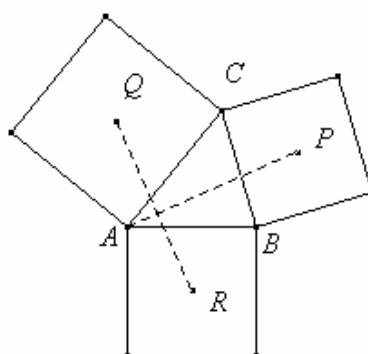


Figura 4

Il problema può essere risolto in modo tradizionale, con l'uso delle nozioni di geometria sintetica che si acquisiscono normalmente al termine del biennio di scuola secondaria superiore, ma un'analisi più approfondita rivela che la sua risoluzione diventa più rapida ed elegante con l'uso delle trasformazioni geometriche del piano. Così come è proposto, il problema è formulato in forma chiusa, ovvero in un modo dove l'allievo sa già dove si vuole arrivare e conosce in anticipo la tesi. Un metodo didattico più efficace suggerisce invece, nella presentazione in classe, di proporre anche dei problemi in forma "aperta", chiedendo agli allievi di osservare le varie configurazioni ricavate dalla variazione dinamica della figura e di formulare delle possibili congetture. Quindi, almeno nella fase iniziale, conviene creare una situazione di apprendimento di tipo "aperto", in cui gli allievi analizzano la figura con l'aiuto di un software di geometria dinamica e arrivano ad individuare alcune proprietà della figura. Queste proprietà, che hanno il carattere di congetture, saranno nel seguito sottoposte a verifica per arrivare alla loro dimostrazione.

Il software permette quindi di trovare delle dimostrazioni che fanno uso delle isometrie. Il problema si presta ad essere risolto anche con "carta e matita", ma l'uso del software, dal

punto di vista didattico, fornisce sicuramente un arricchimento e un notevole vantaggio per l'apprendimento e la motivazione, stimolando gli allievi alla ricerca della soluzione.

4. Luoghi geometrici, geometria analitica e grafici di funzioni

Oltre agli strumenti di geometria sintetica, quasi tutti i sistemi di geometria dinamica permettono la costruzione di luoghi geometrici e contengono un ambiente per lo studio della geometria analitica, con la possibilità di visualizzare dinamicamente coordinate di punti, equazioni di rette e di coniche. La nozione di luogo geometrico è una delle più importanti della geometria e il software di geometria dinamica permette di renderla quasi sperimentale. Con l'uso dello strumento Luogo il software diventa una "macchina matematica" virtuale ed è possibile tracciare luoghi di tutti i tipi. Particolarmente potente, da questo punto di vista, è l'ultima versione di *Cabri*, con l'aiuto della quale si possono costruire dei luoghi geometrici e determinare, nel caso si tratti di curve algebriche fino al sesto grado, le loro equazioni. Oppure, viceversa, si può tracciare il grafico di una funzione e studiarne le proprietà in modo dinamico.

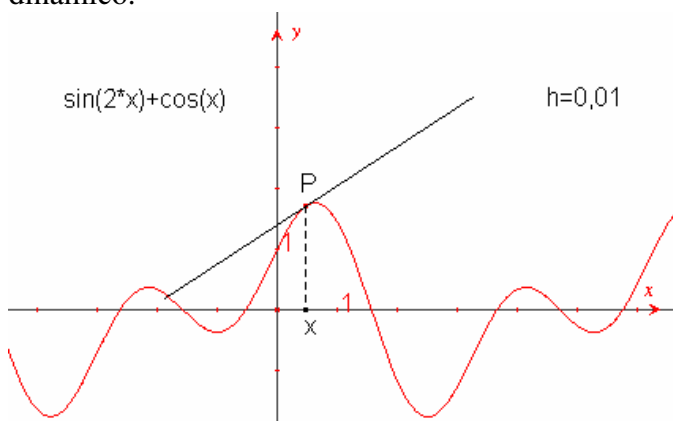


Figura 5

I software di geometria dinamica hanno quindi molte altre potenzialità di tipo didattico che si possono sfruttare in classe, non solo per la geometria, ma più in generale per l'insegnamento della matematica (e anche della fisica e del disegno). Con l'uso di questi strumenti diventa possibile un insegnamento dinamico e interattivo della geometria analitica, della goniometria, dei grafici di funzione e un'introduzione visuale ai concetti dell'analisi: variazioni di una funzione, rapporto incrementale, derivata (figura 5), integrale definito. È possibile, in particolare, passare da una figura geometrica variabile al grafico di una funzione e risolvere dinamicamente dei problemi di massimo e di minimo.

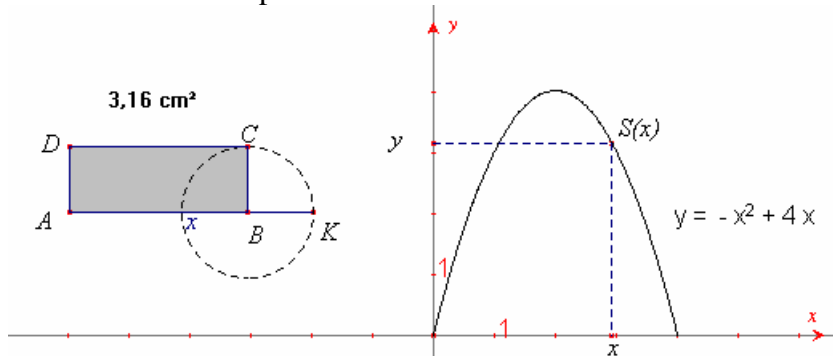


Figura 6

Alcuni esempi elementari che permettono di introdurre i diversi aspetti del concetto di funzione sono i seguenti:

- Grafico del perimetro di un quadrato in funzione del lato.
- Grafico della lunghezza della circonferenza in funzione del diametro.
- Tra tutti i triangoli rettangoli i cui cateti hanno somma costante, determinare quello che ha area massima.
- Determinare le dimensioni del rettangolo di area massima che si può inscrivere in un triangolo isoscele.
- Tra i rettangoli che hanno la stessa area, trovare quello di perimetro minimo.
- Tra i rettangoli che hanno lo stesso perimetro determinare quello di area massima. Nella figura 6 questo problema è stato visualizzato con *Cabri Géomètre II Plus*, che permette di tracciare, come luogo, il grafico dell'area del rettangolo $ABCD$ in funzione della misura di AB e di ottenere l'equazione del luogo.

5. Geometria dello spazio e software di geometria dinamica

I sistemi di geometria dinamica si sono diffusi nella pratica didattica prevalentemente per l'insegnamento della geometria piana. Facendo uso di un metodo di rappresentazione –per esempio l'assonometria cavaliere- questi software possono anche essere usati per ottenere delle figure di geometria solida. In questo modo, tuttavia, non si può ottenere la stessa dinamicità e facilità di interazione che si ha per le figure del piano. Le figure tridimensionali sono più difficili da realizzare e richiedono una buona conoscenza delle tecniche del disegno, non presente in genere negli allievi di scuola secondaria. Uno dei problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria dello spazio è quindi legato alla difficoltà di eseguire delle buone figure sia con gli strumenti tradizionali che con il software.

La disponibilità oggi di un software come *Cabri 3D* permette di superare questa difficoltà in quanto si possono costruire figure di geometria dello spazio con la stessa interattività permessa dai software per le figure piane. Gli autori di *Cabri 3D* hanno utilizzato le caratteristiche hardware e software raggiunte oggi dalla *computer graphics* per creare un programma di geometria solida. Il software permette di ottenere figure 3D dinamiche e interattive, particolarmente efficaci per esplorare situazioni e fatti geometrici, in quanto favoriscono l'intuizione e il ragionamento nello spazio. Si può costruire una figura di geometria dello spazio senza dovere conoscere inizialmente –come prerequisito- le tecniche del disegno tridimensionale.

Cabri 3D permette di costruire e manipolare i seguenti tipi di oggetti nello spazio:

- Punti, rette, semirette, segmenti, vettori
- Circonferenze e coniche
- Piani, semipiani, angoli convessi, triangoli, poligoni; poligoni regolari
- Sfere, cilindri, coni.
- Poliedri, tetraedri, prismi, piramidi, parallelepipedi rettangoli; poliedri regolari.

Le costruzioni sono effettuate grazie agli strumenti (primitive geometriche) contenuti nelle caselle e in particolare nella casella “Costruzioni” (perpendicolare, parallelo/a, piano assiale, punto medio, somma di vettori), che si selezionano prima di creare o di agire su un oggetto. *Cabri 3D* presenta inoltre la casella di strumenti “Trasformazioni” dedicata alle principali

isometrie dello spazio (simmetria centrale, simmetria assiale, simmetria rispetto a un piano, traslazione e rotazione).

Nella rappresentazione di una figura tridimensionale il software usa come impostazione iniziale la prospettiva. Questo tipo di rappresentazione corrisponde alla visione naturale degli oggetti tridimensionali. In essa si immagina di osservare gli oggetti da un punto di vista che si trova a distanza finita dall'oggetto, al contrario dell'assonometria, nella quale si osserva l'oggetto dall'infinito.

Cabri 3D può quindi essere utile nella scuola secondaria –all'insegnante e agli allievi- quando si affrontano argomenti di geometria dello spazio, perché consente di costruire e interagire facilmente con le figure tridimensionali, offrendo un supporto notevole all'intuizione e alla visualizzazione dinamica di proprietà geometriche. La possibilità di cambiare il punto di vista su una figura è una delle caratteristiche più importanti del software e rende la costruzione di figure tridimensionali al computer di una valenza incomparabile, dal punto di vista didattico, rispetto alle costruzioni che si possono fare alla lavagna o su un foglio da disegno con gli strumenti tradizionali.

In particolare è possibile fare costruzioni nello spazio così come si procede nelle costruzioni “con riga e compasso” nel piano. I problemi di rappresentazione sono automaticamente “presi in carico” dal software; uno studente deve però conoscere le primitive geometriche del software, che sono modellate sugli assiomi della geometria dello spazio.

Il software *Cabri 3D* è particolarmente efficace nell'analisi e nella visualizzazione di proprietà che mettono in gioco unicamente punti, rette e piani dello spazio. Si possono così visualizzare proprietà riguardanti l'appartenenza, il parallelismo e la perpendicolarità nello spazio.

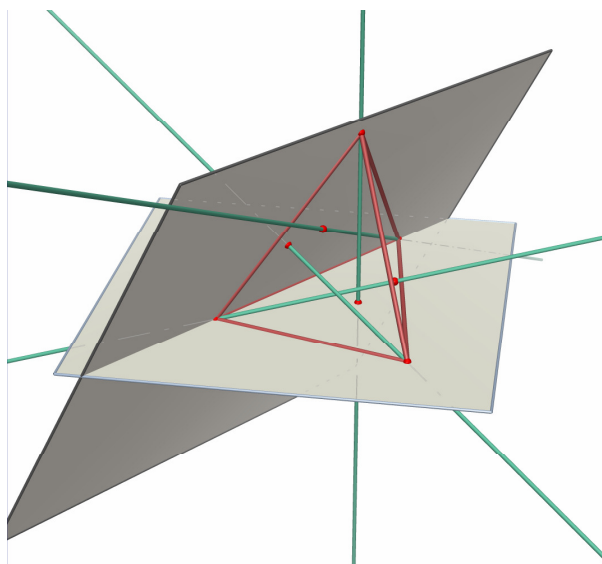


Figura 7 – Altezze di un tetraedro.

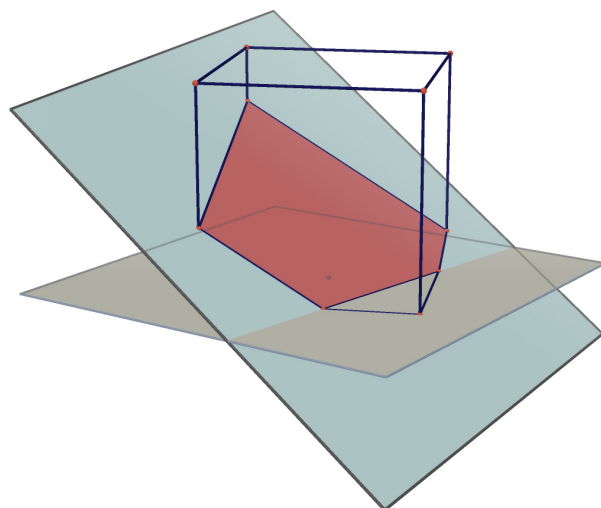


Figura 8 – Sezione piana di un cubo

Lo studio e la costruzione dei poliedri possono essere condotti in modo interattivo. Si possono, ad esempio, esplorare le proprietà dei tetraedri. Nella figura 7 è stato costruito un tetraedro non regolare e le sue altezze, intese come rette. Con *Cabri 3D* è facile rendersi conto che in generale le altezze di un tetraedro non si incontrano in un unico punto, come invece succede per le altezze di un triangolo. Si può indagare in modo interattivo, provando a

trascinare uno dei vertici del tetraedro, e scoprire quali sono le condizioni affinché le altezze di un tetraedro si incontrino. Questa situazione è particolarmente interessante e si presta ad analisi e scoperte che mostrano come non si possa sempre stabilire un'analogia tra le proprietà delle figure nel piano e quelle delle figure nello spazio.

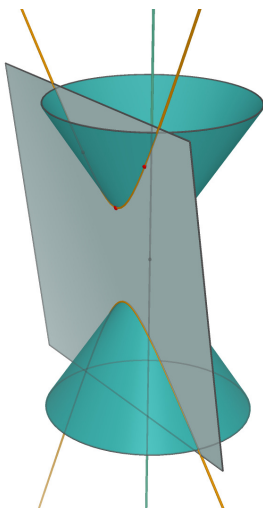


Figura 9 – Sezione conica (iperbole)

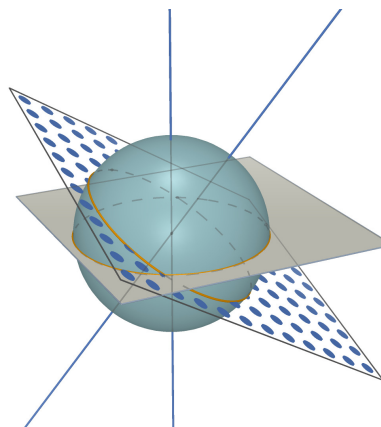


Figura 10 – Sfera, piani e cerchi massimi

Un altro tema che si affronta nello studio della geometria dello spazio è quello delle sezioni piane dei solidi, perché permette di passare dallo spazio al piano e viceversa. Con *Cabri 3D* si può ad esempio intersecare un poliedro con un piano ed esaminare le intersezioni al variare del piano. Nella figura 8 è visualizzata l'intersezione tra un cubo e un piano.

Una delle utilizzazioni più interessanti di *Cabri 3D* si ha nello studio delle coniche, che si possono presentare con la stessa costruzione data nell'antichità da Apollonio di Perga (262-190 a.C.), ossia come sezioni tra un piano e la superficie di un cono (figura 9). Nella figura 10, infine, è stata disegnata l'intersezione tra un piano e la superficie di una sfera, in modo da definire una circonferenza massima. Questa costruzione può servire, ad esempio, per introdurre a scuola qualche elemento della geometria sulla sfera.

6. Conclusioni

Nei paragrafi precedenti è stato discusso l'apporto che i software di geometria dinamica possono dare oggi per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria, sia del piano che dello spazio.

Le caratteristiche dei sistemi di geometria dinamica sono attualmente sempre più potenti e tra loro diversificate e tendono a integrare strumenti di geometria sintetica e di geometria analitica nello stesso software, come ad esempio in *Cabri Géomètre II Plus*, *The Geometer's Sketchpad* e *GeoGebra* per citare i più diffusi. Non è facile prevedere gli sviluppi futuri di questi sistemi, ma certamente si aprono sempre maggiori possibilità di applicazione di questi software nell'insegnamento e nella visualizzazione dinamica di quasi tutti i temi del curriculum di matematica.

Il compito degli insegnanti nella scelta dei software più validi dal punto di vista didattico e adatti ad essere utilizzati in classe è sempre più impegnativo, ma nello stesso tempo diventa

ancora più interessante, viste le grandi potenzialità degli strumenti software oggi a disposizione.

Bibliografia

- AA.VV., *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*, MAA-The Mathematical Association of America, 1997.
- AA. VV., *Geometria e multimedialità. Seminario di formazione docenti*, MPI - L.S. Vallisneri, Lucca, 2000.
- P. Boieri, C. Dané, *Cabri. Laboratorio informatico per la Matematica*, Loescher, Torino 2003.
- P. Boieri, C. Dané, *Geometria con Cabri. Costruire, scoprire e dimostrare*, Loescher, Torino 2003.
- P. Boieri, L. Tomasi, *In laboratorio con Cabri 3D. 25 schede di geometria dello spazio*, Loescher, Torino 2009.
- C. Di Stefano, *Cabri A, B, C. Matematica in laboratorio*, Ghisetti e Corvi, Milano 2000.
- L. Tomasi, Geometria dello spazio, da Cabri II a Cabri 3D: rappresentazione e visualizzazione dinamica, in *Cabri World 2004, Percorsi di geometria dinamica*. Media Direct, 2004, pp. 187-198.
- Bollettini e Quaderni di *CABRIRRSAE*, Bologna, 1993-2004 (disponibili in modo completo nel sito: www.unife.it/progetti/fardicono)

Siti web

I siti dedicati a *Cabri Géomètre* sono molto numerosi. Per un elenco commentato vedi:

www.unife.it/progetti/fardicono

Vedi il sito www.unife.it/progetti/fardicono/cabrirrsae contiene molti materiali didattici su *Cabri*.

Il sito ufficiale su *Cabri Géomètre* e su *Cabri 3D* è quello di Cabrilog: www.cabri.com

Su *The Geometers's Sketchpad* vedi il sito ufficiale:

<http://www.keypress.com/sketchpad/>

Sul software *Cinderella* vedi il sito: <http://cinderella.de/>

Su *C.a.R.- Compass and Ruler* (nome originale: *Zirchel und Lineal*) vedi il sito:

<http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/>

Su *GeoGebra* vedi il sito: <http://www.geogebra.at/>

Su *Dr.Geo*, vedi il sito: <http://www.ofset.org/drgeo>