

Concorso ordinario 1982 - Classe di concorso A049 - Matematica e Fisica

Prova scritta di matematica

1) È data un'ellisse **E** di semiassi **a**, **b**.

A. Nella totalità dei quadrilateri inscritti in **E** si caratterizzino quelli di area massima; in particolare si provi che ogni punto di **E** è vertice di un quadrilatero siffatto. (Si fissi un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si tenga presente che: a) nella totalità dei quadrilateri inscritti in **E** una circonferenza, quelli di area massima sono i quadrati; b) ogni ellisse è la trasformata di una circonferenza in un'opportuna affinità; c) le affinità conservano i rapporti tra le aree di figure corrispondenti).

B. Tra i quadrilateri di area massima, inscritti in **E**, si determinino quelli di perimetro massimo.

C. Sia **R** il rettangolo di lati **2a**, **2b**, circoscritto ad **E**; si considerino i punti in cui i lati di **R** sono tangenti ad **E** ed i punti in cui le diagonali di **R** intersecano **E**. In ciascuno di tali punti si calcoli il raggio di curvatura di **E**.

D. Si dimostrino i risultati a), b), c), enunciati in 1.

2) A. Si studi la quartica piana **C** definita da:

$$x^4 + y^4 - xy = 0.$$

B. Si mostri in particolare che la parte reale di **C** ha nell'origine un nodo con due cappellicci, dei quali si determini l'area.

C. Si determinino le omografie piane (affinità) che mutano in sé la **C**.

D. Si studi il gruppo **G** delle omografie ottenute.

E. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{4x^3 - y}{4y^3 - x} \quad (1)$$

F. Si verifichi che le omografie di **G** mutano in sé la famiglia delle linee integrali della (1).

3) Sia dato un tetraedro regolare **T**.

A. Si calcoli il rapporto tra il volume della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in **T**.

B. Si determini l'ampiezza degli angoli diedri determinati dagli spigoli di **T**.

C. Si descriva e si studi il gruppo **G** delle isometrie di **T** in sé.

D. Si descriva il poliedro **P** che si ottiene assumendo come vertici di **P** i centri delle facce di **T**.

E. S'inquadri lo studio del tetraedro regolare nell'ambito della teoria dei poliedri regolari.

F. Si collochi il tetraedro **T** nel primo ottante di un sistema cartesiano ortogonale, di coordinate **x**, **y**, **z**, in modo che un vertice cada nell'origine, uno spigolo sull'asse delle ascisse ed una faccia sul piano **xy** e si dica, supposta **6** la lunghezza dello spigolo, qual è la probabilità che i tre numeri risultanti da tre lanci di un dado, con facce numerate da **1** a **6**, presi nell'ordine del lancio, rappresentino le coordinate di un punto interno al tetraedro.

(Durata massima della prova scritta di Matematica: 8 ore)

Prova scritta di fisica

1) I tre principi della termodinamica: loro significato e loro collocazione nell'ambito della fisica classica e moderna sia dal punto di vista macroscopico che microscopico.

2) Raggi X di lunghezza d'onda **0,0060 nm** incidono su elettroni liberi praticamente fermi, dando luogo ad effetto Compton. Dopo aver ricavato la relazione di Compton che dà la variazione della lunghezza d'onda del fotone diffuso in funzione dell'angolo di diffusione, della costante h di Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J sec}$), della velocità c della luce ($c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$) e della massa a riposo m_0 dell'elettrone ($m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$), determinare lo spettro dei raggi X diffusi (ossia entro quali valori varia la lunghezza d'onda dei raggi X diffusi), l'energia massima acquisita dagli elettroni urtati dai raggi X oltre che la corrispondente velocità \bar{v}_1

Si ripeta l'esame del precedente problema nel caso in cui la lunghezza d'onda dei raggi X incidenti sia **0,120 nm** e si determini anche in questo caso la velocità massima \bar{v}_2 acquisita dagli elettroni urtati oltre che la lunghezza d'onda di De Broglie ad essi associata.

Un pennello di tali elettroni (con velocità \bar{v}_2) attraversa perpendicolarmente il campo elettrico uniforme generato da due superfici piane affacciate cariche di segno opposto. Il pennello di elettroni, attraversando il campo elettrico per un tratto della lunghezza di **1,00 cm**, subisce una deviazione di **0,20** radianti. Calcolare l'intensità \bar{E} del campo elettrico e la d.d.p. tra le placche nel caso in cui queste distino **5,0 mm**, sapendo che la carica dell'elettrone è $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Calcolare quale induzione \bar{B} deve avere un campo magnetico perpendicolare al predetto campo elettrico \bar{E} ed alla velocità \bar{v}_2 degli elettroni, affinché il pennello da essi costituito non subisca alcuna deviazione, quando cioè le forze dovute al campo elettrico ed al campo magnetico si compensino annullandosi.

Quale traiettoria seguirebbero gli elettroni nel caso in cui venisse meno il campo elettrico? Determinare il raggio di curvatura di tale traiettoria e, se il moto è periodico, la sua frequenza.

Se attraverso i precedenti campi elettrico e magnetico si iniettassero elettroni con velocità pari al doppio o alla metà della velocità \bar{v}_2 degli elettroni sopra considerati, tali elettroni seguirebbero la stessa traiettoria di quelli con velocità \bar{v}_2 ? Giustificare la risposta.

3) Nell'esperimento di Young la distanza tra le due fenditure sia **0,14 mm** e la distanza tra lo schermo con le due fenditure e lo schermo su cui si raccoglie la figura di interferenza sia di **450 cm**. Calcolare la distanza tra due frange successive se la lunghezza d'onda della luce monocromatica usata è di **633 nm**.

Calcolare quanto debbano essere larghe le due fenditure affinché nella frangia centrale di diffrazione cadano **7** frange di interferenza.

Calcolare inoltre la distanza tra due frange successive qualora l'esperimento fosse eseguito in acqua ($n = 1,333$).

Se la sorgente di luce usata ha una potenza di **0,50 mW**, quanto fotoni emette al secondo? ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$).

Ripetendo l'esperimento di Young con onde elettromagnetiche di frequenza **10,0 GHz**, con due fenditure distanti **12 cm** e si raccolgono le frange di interferenza su uno schermo a **60 cm** dalle doppie fenditure, si trovano frange di interferenza non equidistanti: determinare la distanza tra la frangia centrale e la prima frangia laterale e la distanza tra questa e la seconda frangia laterale.

Si tratti, in generale, il tema della diffrazione e dell'interferenza delle onde elettromagnetiche.

(Durata massima della prova scritta di Fisica: 8 ore)