Colpire il bersaglio

IPOTESI, anno 1 n° 1, settembre 1998.

Resoconto di un'attività in classe

sul moto parabolico svolta con la TI92

Prof. Michele Impedovo

Questo articolo è il resoconto di un'attività svolta in una classe terza liceo scientifico durante lo studio dei moti parabolici. Riassumo per comodità del lettore alcuni classici risultati.

Il moto parabolico di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 e angolo di inclinazione α (quindi con vettore velocità iniziale $\mathbf{v}_0=[v_0\cos(\alpha), v_0\sin(\alpha)]$), in assenza di attrito ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

dove g è l'accelerazione di gravità (circa 9.8 m/s^2 sulla superficie terrestre). Possiamo descrivere sinteticamente posizione e velocità del punto mediante i vettori **s** e **v**:

$$\mathbf{s} = [v_0 \cos(\alpha)\, t,\ v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2]$$

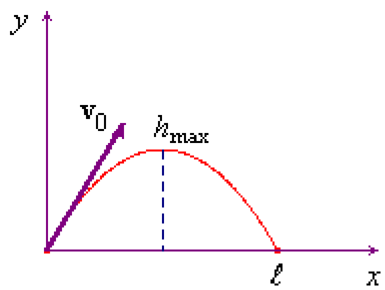
$$\mathbf{v} = [v_0 \cos(\alpha),\ v_0 \sin(\alpha) - gt].$$

L'equazione cartesiana della traiettoria si ottiene dalle equazioni parametriche del moto eliminando il parametro t:

$$y = \tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 ;$$

la *gittata* (la distanza orizzontale percorsa dal proiettile) è

$$l = sin(2\alpha)\frac{v_0^2}{g}.$$



Come è noto si ha quindi un risultato notevole: a parità di velocità iniziale la gittata è massima per α=45°.

L'altezza massima raggiunta si ha quando la componente verticale della velocità è nulla, cioè all'istante

$$t = v_0 \sin(\alpha)/g$$

e vale

$$h_{\max}=\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}.$$

Con la TI92 è possibile simulare moti fisici, mediante l'ambiente grafico *Parametric*.

Ecco un esempio: dopo aver scelto la modalità Parametric per i grafici:

Mode, Graph, Parametric

inseriamo in Y=Editor le funzioni

$$\begin{cases} xt1(t) = 40t \\ yt1(t) = 30t - 4.9t^2 \end{cases}$$

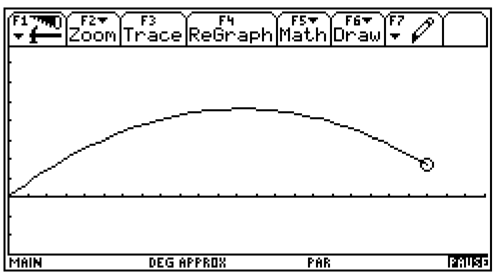
che simulano un moto parabolico con

$$\mathbf{v}_0=[40,30],\ v_0=50 \text{ m/s}$$

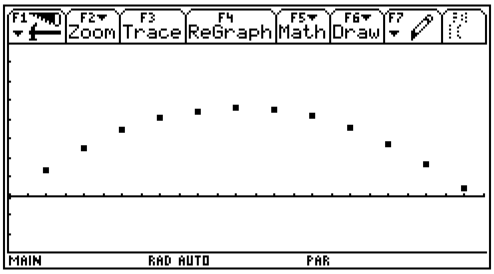
$$\alpha=\arctan(0.75) \approx 37°.$$

Tale moto parabolico ha una gittata di circa 245 m; l'altezza massima è circa 46 m, raggiunta in circa 3 s.

Impostiamo la finestra WINDOW: tmin=0, tmax=6,tstep=0.1 (si visualizza il moto per 5 secondi, con passo 0.1 s), xmin=0, xmax=250, xscl=10, ymin=0, ymax=50, yscl=10, e visualizziamo il grafico con F2, Zoomsqr (in modo che risulti monometrico). Se impostiamo, dall'ambiente Y=Editor, F6 Path si ottiene il grafico seguente, che mostra la traiettoria.

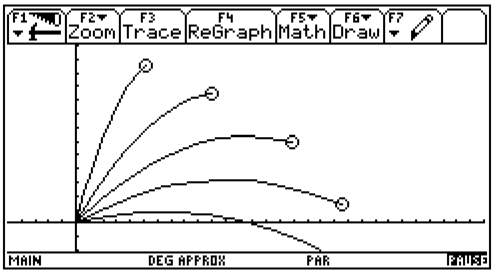


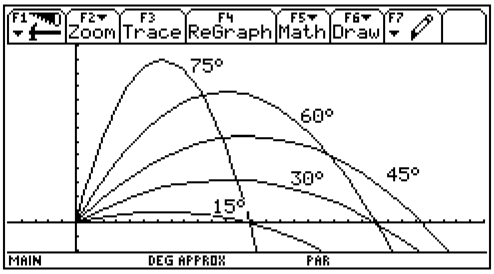
Con F6 Square si ottiene invece un grafico per punti, a intervalli regolari di tempo pari al valore di tstep in Window; per esempio, con tstep=0.5 si ottiene la posizione del moto ogni mezzo secondo.



Il fatto che i punti siano più vicini in corrispondenza del vertice della parabola suggerisce il fatto che la velocità è minima nel vertice.

È possibile visualizzare il fatto che la gittata massima si ha per 45°, e che angoli di elevazione complementari hanno la stessa gittata. Ecco per esempio, sempre con velocità iniziale 50 m/s, le traiettorie per angoli di elevazione di 15°, 30°, 45°, 60°, 75°.





Uno studente ha sollevato ad un certo punto il seguente problema:

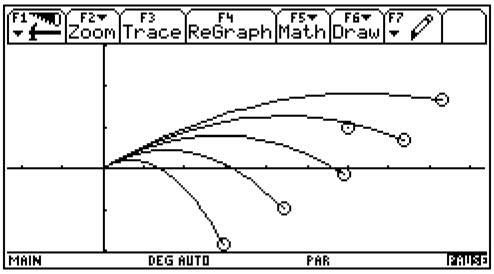
Supponiamo di voler colpire un bersaglio posto nel punto (x_0,y_0)*: quale* ***velocità iniziale*** *e quale* ***angolo di elevazione*** *occorre utilizzare?*

Il problema naturalmente ammette infinite soluzioni. Supponiamo che il bersaglio sia nel primo quadrante; se indichiamo con β la coordinata angolare del bersaglio, $\beta=\arctan(y_0/x_0)$, per ogni angolo di elevazione $\alpha>\beta$ (e $\alpha<90°$) esiste un'opportuna velocità iniziale per colpire il bersaglio.

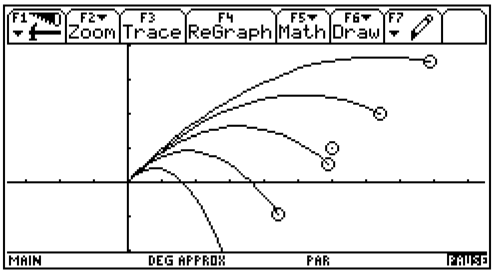
Nel basket il canestro è ad un'altezza di 3 m e il tiro da tre punti si effettua a 6 m di distanza (orizzontale) dal canestro; per un cestista di altezza 2 m il problema è quello di colpire con la palla un bersaglio di coordinate (6,1) e quindi

$$\beta = \arctan(1/6) \approx 9.5°.$$

Qual è la velocità da imprimere alla palla se l'angolo di tiro è α=30°? Con la TI92 si può andare per tentativi: il grafico seguente è stato ottenuto con velocità iniziali 4, 6, 8, 10, 12 m/s. Come si vede, la velocità corretta è quasi 10 m/s.



Invece con α=45° la velocità corretta è poco più di 8 m/s.



A questo punto è sorta spontanea la domanda: qual è l'angolo di tiro "migliore", cioè

*Per quale angolo α si ha la **minima velocità iniziale**?*

Gli studenti si sono messi a fare esperimenti, con bersagli in punti differenti, cercando di colpirli con tentativi a casaccio: è interessante notare che nessuno, inizialmente, ha adottato un approccio teorico, analizzando e manipolando le formule a disposizione. Di fronte ad un problema ancora grezzo, l'istinto degli alunni (e forse anche quello dell'insegnante) è naturalmente portato all'esperimento e alla congettura. Il lavoro dell'insegnante deve essere quello di guidare tale attività sperimentale, in modo che i tentativi siano organizzati e mirati ad un obiettivo generale. Per esempio, inizialmente gli studenti hanno fissato arbitrariamente le coordinate del bersaglio, e con diverse prove hanno individuato con una certa approssimazione l'angolo di tiro e la minor velocità iniziale. Gruppi diversi hanno ottenuto i seguenti dati:

Bersaglio (x,y)	velocità iniziale	α
(6,1)	8.3	50°
(3,3)	8.4	67°
(2,5)	10.1	79°
(6,4)	10.5	62°

Come si vede, i dati non sono organizzati, e non sono utili a favorire il sorgere di congetture.

Non è stato facile far loro osservare che è inizialmente necessario mettere in relazione l'angolo del bersaglio con l'angolo di tiro, cioè chiedersi se esiste una **funzione** che, preso in ingresso β, fornisce in uscita α.

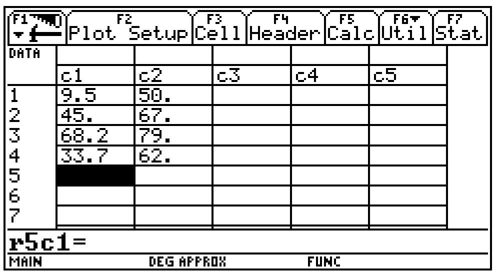
Allora abbiamo trasformato la tabella precedente:

Bersaglio (x,y)	β= arctan(y/x)	α=angolo di tiro
(6,1)	9.5°	50°
(3,3)	45°	67°
(2,5)	68.2°	79°
(6,4)	33.7°	62°

La tabella non fornisce apparentemente alcun suggerimento. Il modo migliore di capire se c'è qualche legame tra α e β è, come sempre, quello di fare un grafico dei punti (β,α).

Mettiamo questi quattro punti in una tabella della TI92:

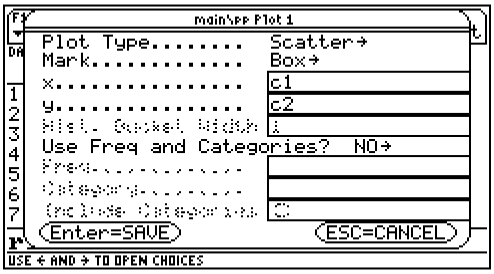
APPS, Data/Matrix Editor, New



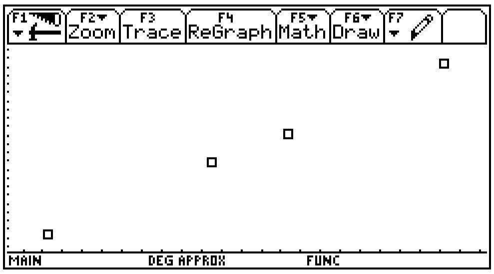
e definiamo il grafico di tali punti con

F2 Plot Setup, F1 Define

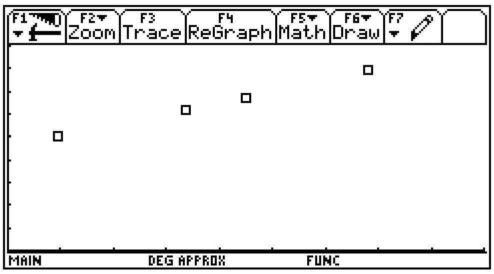
associando le colonne c1 e c2 rispettivamente all'asse *x* e all'asse *y*:



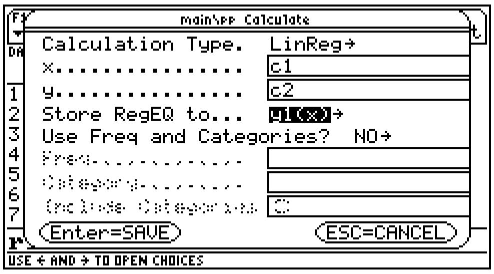
In ambiente Graph scegliamo come finestra di visualizzazione quella fornita automaticamente dalla TI92 per le tabelle: F2 Zoomdata.

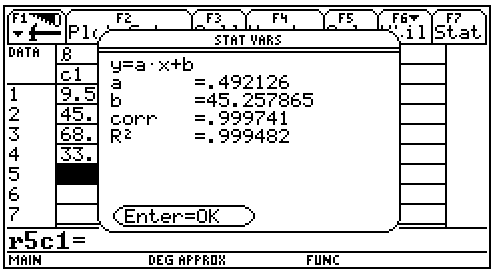


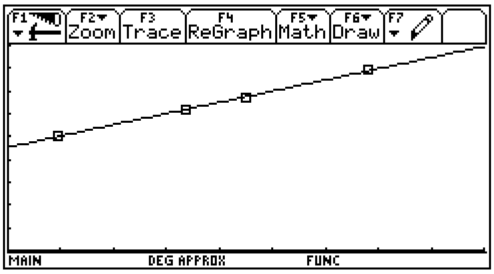
Come si vede i punti sembrano allineati su una retta, suggerendo il fatto che il crescere di α in funzione di β sia di tipo lineare. Per meglio vedere tale retta possiamo settare la finestra di WINDOW con xmin=ymin=0, xmax=ymax=90, xscl=yscl=10.



Torniamo in Data/Matrix Editor e cerchiamo la *miglior retta* (la retta di regressione lineare) che approssima tali punti, utilizzando F5 Calc.







La retta di regressione ha circa equazione α=0.5β+45. Che risultato è? Con β=0, cioè se il bersaglio è sulla stessa retta orizzontale del punto di tiro allora α=45° (questo si accorda con quanto già sappiamo sulla gittata massima), cioè α è l'angolo della bisettrice tra le direzioni del bersaglio e della verticale.

Ecco la soluzione!

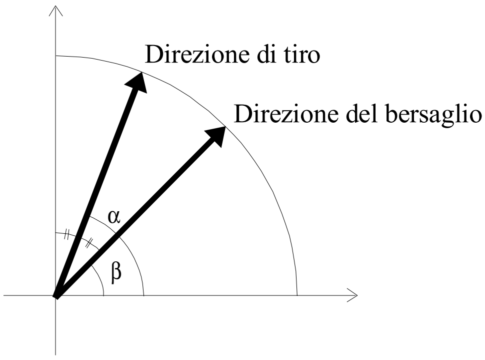
L'angolo di tiro più efficiente (che consente la minima velocità iniziale) è quello della bisettrice tra la direzione del bersaglio e la verticale.

Quindi

$$\alpha = \beta + \frac{90° - \beta}{2} = 45° + \frac{\beta}{2},$$

come già avevamo trovato sperimentalmente.

In effetti il risultato è convincente: se α è troppo vicino a β, oppure se α è troppo vicino alla verticale, allora la velocità iniziale deve essere elevata; è ragionevole pensare che α sia la bisettrice di quelle due direzioni.



Ora non è difficile determinare la velocità iniziale. Se la traiettoria deve passare per il bersaglio di coordinate (x,y), allora nell'equazione della traiettoria

$$y = \tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

poniamo $\alpha=45+\beta/2=45+\frac{1}{2}\arctan(y/x)$, e ricaviamo v_0 (supponiamo che sia $x>0$, $y>0$, $0<\beta<90°$):

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2(\tan(\alpha)x - y)\cos^2(\alpha)}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{2(\tan(\alpha)x - y)}}\cos(\alpha)\, x\,.$$

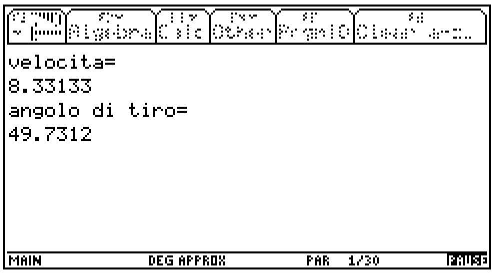
L'ultimo lavoro svolto con la TI92 è stato quello di scrivere un programma che sintetizzasse l'intera analisi: date in ingresso le coordinate del bersaglio, il programma calcola l'angolo di tiro e la velocità iniziale, e infine traccia il grafico.

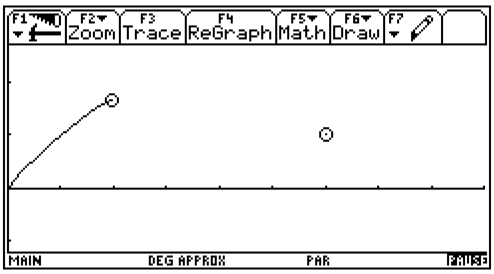
Ecco il programma **mp** (moto parabolico).

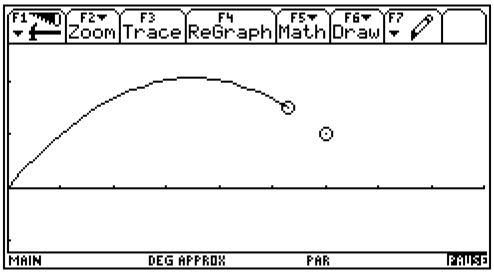
```
mp(xx,yy)
Prgm
Local b
ClrIO
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
setMode("Graph","PARAMETRIC")
setMode("Angle","DEGREE")
setGraph("graphorder","simul")
FnOff
```

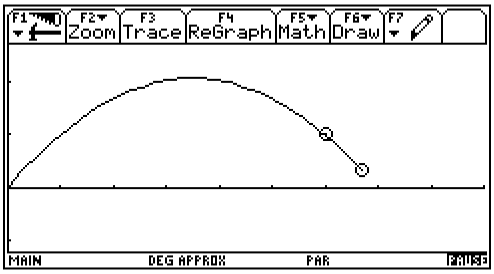
```
xx→x0:yy→y0
tan°(yy/xx) →b
45+b/2→a
√ (4.9*xx^2/((cos(a))^2*(tan(a)*xx-yy))) →v
x0→xt1(t):y0→yt1(t)
v*cos(a)*t→xt2(t)
v*sin(a)*t-4.9*t^2→yt2(t)
Disp "velocita=",v
Disp "angolo di tiro=",a
Pause
0→xmin:1.5*xx→xmax:0→ymin:1.5*yy→ymax
0→tmin:sin(a)*v/(4.9) →tmax:
tmax/25→tstep
Style 1,"path"
Style 2,"path"
ZoomSqr
setMode("Exact/Approx","AUTO")
EndPrgm
```

Con il comando **mp(6,1)** dall’ambiente HOME si ottengono le seguenti schermate:









Questo lavoro, che complessivamente ha impegnato i ragazzi a scuola per 4 ore, ha consolidato alcune abilità che ritengo fondamentali per una buona preparazione scientifica. Oltre alle applicazioni "sul campo" di nozioni riguardanti il calcolo simbolico, la trigonometria, le equazioni cartesiane e parametriche, questo lavoro ha allenato gli allievi a organizzare gli esperimenti, al fine di mettere in relazione una variabile con un'altra, cioè al fine di ricavare una variabile **in funzione** di un'altra. Può sembrare banale, ma l'idea che **esista** una funzione matematica che associ una grandezza ad un'altra (idea guida nella rivoluzione scientifica del '600) non è affatto naturale per alunni abituati ad una matematica già codificata. Inoltre il problema svolto consente di distinguere l'aspetto semantico dall'aspetto sintattico: esso tratta di grandezze fisiche sulle quali è possibile sia un approccio di tipo intuitivo (il problema è chiaro e *visibile* mentalmente), sia un'analisi strettamente matematica, mediante la manipolazione delle equazioni del moto. È dall'interazione e dalla distinzione tra questi due aspetti che nasce quella sorta di *disagio cognitivo* che porta ad un nuovo consolidamento dei concetti.

Infine (ma non ultimo) ritengo importante, tra gli obiettivi indispensabili in una preparazione scientifica, quello della manipolazione consapevole di uno strumento automatico di calcolo. L'alunno deve riuscire, in una certa misura, a trattare la calcolatrice (anche una calcolatrice sofisticata come la TI92) con padronanza, piegandola di volta in volta ai propri scopi, così come si è sempre fatto con la riga e il compasso.

Prof. Michele Impedovo