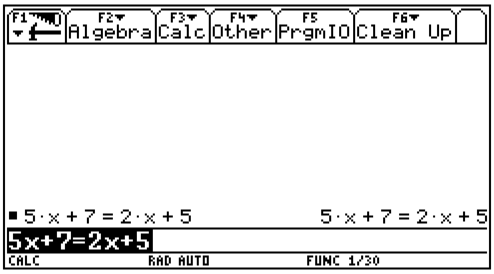
Equazioni e sistemi lineari

Michele Impedovo

Per la TI-92 un'equazione è un oggetto matematico sul quale è possibile operare. Questo consente di risolvere equazioni e sistemi lineari in modo strutturato, senza lasciare spazio alle tante misconcezioni prodotte dai famigerati "portare di qua, portare di là". I cosiddetti *principi di equivalenza* potrebbero andare in pensione, e lasciare spazio all'invertibilità delle operazioni di addizione e moltiplicazione in un campo (**Q**, oppure **R**).
Per esempio risolviamo l'equazione

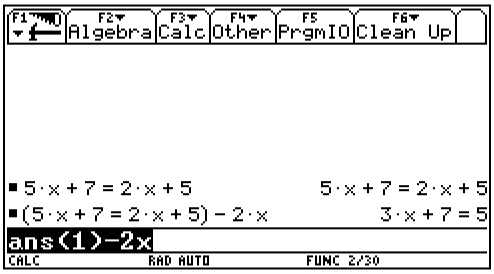
$$5x+7 = 2x-5.$$



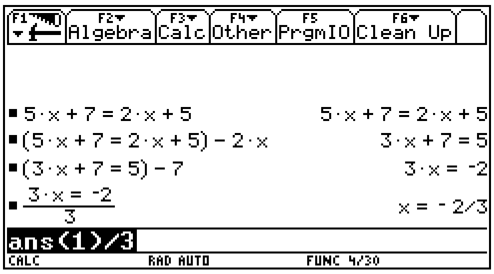
A differenza di Derive l'ambiente *Home* della TI-92 distingue tra *input* (che compare a sinistra del visore) e *output* (che compare semplificato a destra: la TI-92 non prevede il comando *simplify*).
Per risolvere l'equazione vogliamo sottrarre $2x$ ad entrambi i membri: digitiamo semplicemente

$$-2x.$$

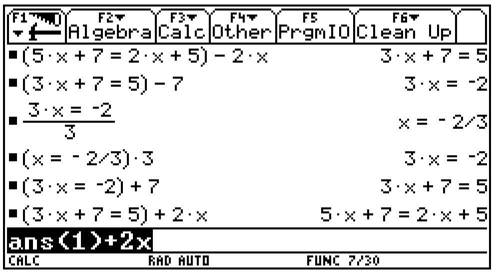
Quando si preme a inizio riga un simbolo di operazione binario (il "–") la TI-92, anziché dare "syntax error" considera automaticamente come primo argomento l'ultimo output, indicato sul visore con ans(1) ("ans" sta per answer: gli output sono automaticamente memorizzati in ans(1), ans(2), … a partire dall'ultimo). Se l'ultimo output è un'equazione, l'operazione verrà effettuata <u>ad entrambi i membri</u> dell'equazione.



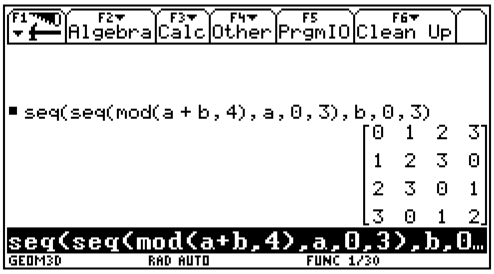
Proseguiamo sottraendo 7 e dividendo per 3.

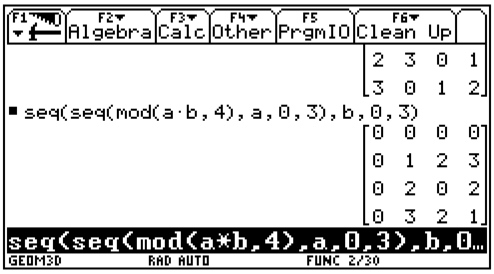


La soluzione è $-2/3$, nel senso che se un numero x soddisfa l'equazione $5x+7 = 2x+5$ allora soddisfa anche l'equazione $x = -2/3$, <u>e viceversa</u>, poiché le operazioni effettuate sono reversibili. Per convincersene possiamo operare a ritroso e ottenere di nuovo l'equazione iniziale.



Dunque non si tratta di *principi* ma di *teoremi di equivalenza*: un numero x soddisfa l'equazione $5x+7 = 2x+5$ se e solo se soddisfa l'equazione $x = –2/3$.
Questo dipende dal fatto che l'ambiente nel quale lavoriamo è un campo: se non lo fosse non sarebbero sempre reversibili le nostre manipolazioni.
Per esempio, vediamo un ambiente nel quale il *principio di equivalenza* non vale; consideriamo l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi resto modulo 4, strutturato rispetto alla somma e al prodotto tra classi di resto.



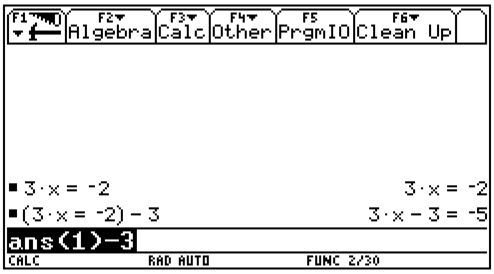


In questo ambiente (è un anello, e non un campo) se moltiplichiamo per 2 l'equazione
$x+2 = 3$
(che ammette l'unica soluzione $x = 1$) otteniamo l'equazione

$$2x+0 = 2$$

che ammette come soluzioni $x = 1$ e $x = 3$: dunque non otteniamo affatto un'equazione equivalente!
La spiegazione risiede nel fatto che $\mathbf{Z}_4$ non è un campo, non tutti gli elementi possiedono inverso rispetto al prodotto; in particolare 2 non è invertibile (come si vede dalla tabella) e la moltiplicazione per 2 non è un'operazione reversibile.

La risoluzione con la TI-92 delle equazioni lineari è fortemente strutturata e lo studente può accorgersi di ogni eventuale errore. Per esempio se tentasse di sottrarre 3 ad entrambi i membri dell'equazione $3x = –2$ non otterrebbe ciò che si aspetta.

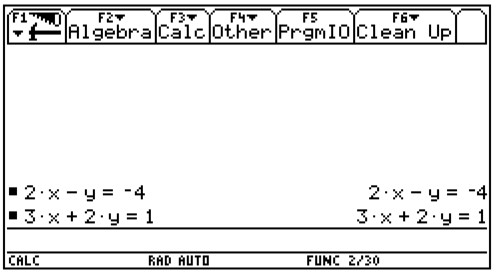


La risoluzione di un'equazione può dunque effettuarsi anche con la calcolatrice, oltre che con carta e penna. I vantaggi non risiedono certo nella rapidità di calcolo, ma nella possibilità di controllare i passaggi e nel rafforzarsi di un solido metodo operativo.

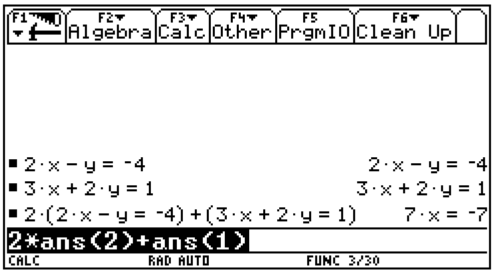
In modo analogo si possono risolvere i sistemi lineari. Supponiamo di voler risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}.$$

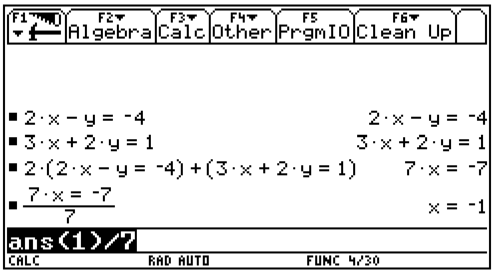
Digitiamo le due equazioni.



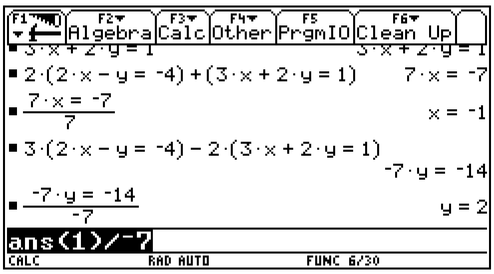
Ora l'ultima equazione è memorizzata come ans(1), e la prima equazione come ans(2). Per ottenere un'equazione nella sola x addizioniamo il doppio della prima equazione alla seconda: 2*ans(2)+ans(1).



Il resto è facile. Digitando "/7" si ottiene il valore di x.



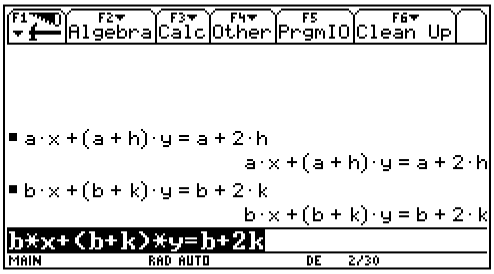
Per ottenere il valore di y usiamo ancora una combinazione lineare delle prime due equazioni: il triplo della prima meno il doppio della seconda.



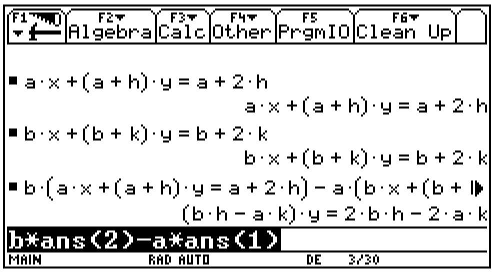
La soluzione è $x = -1$, $y = 2$.

Una curiosità: questa soluzione è comune a qualunque sistema lineare di due equazioni in due incognite in cui i coefficienti e il termine noto di ciascuna equazione costituiscano termini di una *progressione aritmetica*. Dimostriamolo. Digitiamo il generico sistema

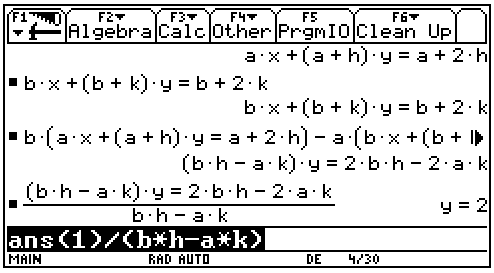
$$\begin{cases} ax+(a+h)y=a+2h \\ bx+(b+k)y=b+2k \end{cases}$$



Ora si moltiplica la prima equazione per *b*, la seconda per *a* e si sottrae.



Dividiamo per il coefficiente di *y* (se è diverso da 0) e otteniamo la soluzione.



In modo analogo si ottiene la soluzione –1 per *x*.