Il signor RADICEDITRESUDUE

Esame di Stato 1999: la prova scritta di matematica al Liceo Scientifico tradizionale

IPOTESI, anno 2, n° 3, gennaio 2000

Michele Impedovo

Nel nuovo Esame di stato cambia tutto, ma non cambia la prova scritta di matematica. Anzi, peggiora.
Quest'anno il misterioso e inaccessibile estensore dei problemi ha mostrato di prediligere quella matematica obsoleta in cui la trigonometria si fa solo con alcuni particolarissimi angoli (30°, 45°, 60°), di modo che non si corra il rischio di avere a che fare con viscide approssimazioni, bensì con nobili e virili radicali: per intenderci, quelli sono esattamente gli angoli per i quali la trigonometria non serve, è sufficiente qualche semplice proprietà delle similitudini.
Il nostro si mostra altresì estimatore giulivo delle formule di bisezione, di parabole che intersecano circonferenze, delle "discussioni", delle solite aree delle solite regioni piane. Insomma, ancora una volta la matematica è scambiata con le tecniche di calcolo.

Ma bando alle inezie, lanciamoci nella ardita risoluzione, armati quest'anno della TI-89: dato che come al solito "*È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile*" la TI-89 può in effetti essere scambiata, date le sue ridotte dimensioni, per una innocua calcolatrice tascabile.

Problema 1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

a) Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:
   - necessaria ma non sufficiente
   - sufficiente ma non necessaria
   - necessaria e sufficiente

   per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

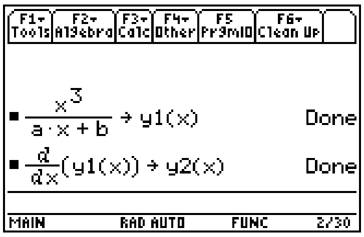
b) Posto $f(x) = \dfrac{x^3}{ax+b}$, dove a e b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$.

c) Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

d) Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e a γ'.

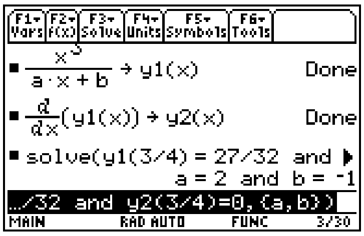
e) Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

La condizione $f'(x_0) = 0$ è naturalmente necessaria ma non sufficiente per concludere che f abbia un estremo relativo in x_0.
Iniziamo ad assegnare $f(x)$ a **y1(x)** e $f'(x)$ a **y2(x)**.

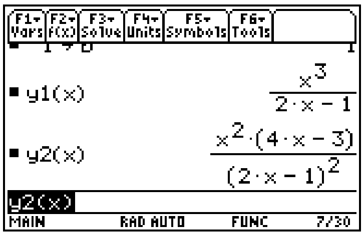


Per determinare l'equazione della curva γ si imposta il sistema

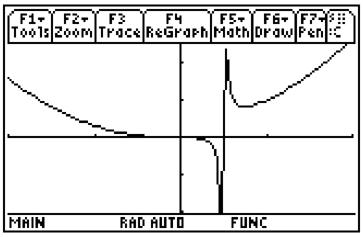
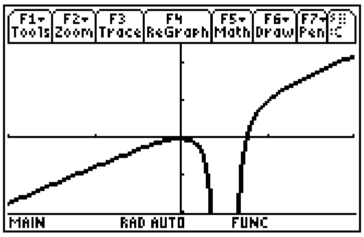
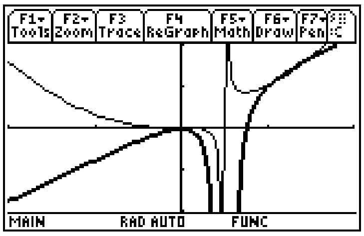
$$\begin{cases} f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{27}{32} \\ f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=0 \end{cases}$$



Si ricava $a = 2$, $b = -1$. Risulta quindi



e i grafici, nel rettangolo $[-2, 2]\times[-2, 2]$ sono i seguenti.

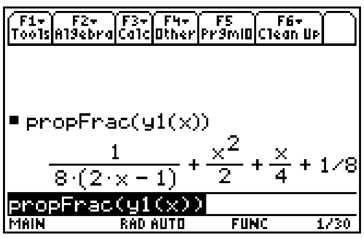




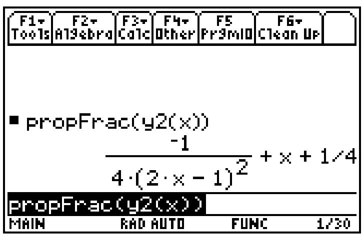
Entrambe le funzioni ammettono l'asintoto verticale $x = 1/2$.
Il grafico di $f(x)$, per x tendente all'infinito, è asintotico alla parabola di equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8},$$

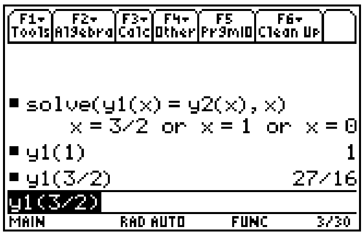
mentre il grafico di $f'(x)$ ammette per asintoto obliquo la retta di equazione

$$y = x+\frac{1}{4}.$$



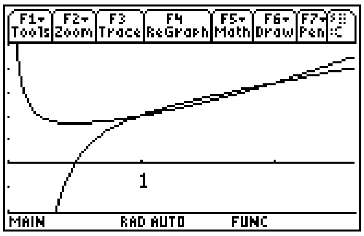


Le intersezioni tra il grafico di $f(x)$ e $f'(x)$ si trovano uguagliando **y1(x)** e **y2(x)**.



I due grafici si intersecano, oltre che nell'origine, nei punti (1,1) e $\left(\frac{3}{2},\frac{27}{16}\right)$.

Ecco i due grafici nel rettangolo $[0.5, 1.8]\times[-1, 2.5]$.



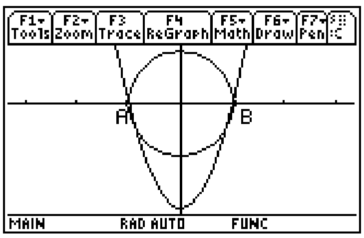
Il quesito (a) è collegato alle due funzioni analizzate: entrambe sono derivabili in $x_0 = 0$, e per entrambe la derivata in 0 è nulla; però in quel punto $f'(x)$ ha un massimo locale, mentre $f(x)$ ha un flesso a tangente orizzontale.
Quanto al quesito (e), chissà quale esoterica relazione tra gli "andamenti" vedeva l'estensore delle tracce. Tutti se lo chiedono, e nessuno lo saprà mai: rimarrà Segreto di Stato.

Problema 2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r ed una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\frac{8}{3}r^2$.

Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della circonferenza k;
b) determinare l'equazione della parabola p;
c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;
d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;
e) stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\frac{32+22\pi-15\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

Ecco un problema in cui il solito inutile parametro r ballerà lungo tutta la risoluzione: in effetti il problema è invariante per similitudine, e poco importa quale sia il valore del raggio di k. Dunque imponiamo d'autorità che sia $r = 1$.



La circonferenza ha equazione $x^2+y^2 = 1$. La parabola (una delle due: il problema è simmetrico rispetto al diametro AB) ha equazione

$$y = a\,(x^2-1)$$

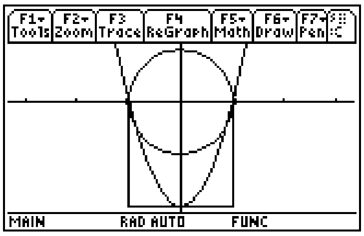
e interseca l'asse y nel punto $(0,–a)$; a deve soddisfare la richiesta secondo cui l'area del segmento parabolico delimitato da AB valga 8/3 cm^2. Poiché l'area del semicerchio è $\pi/2$ cm^2, e $\pi/2 < 8/3$ c'è da supporre che il vertice di p sia ben fuori da k.
Utilizzando il teorema di Archimede (l'area del settore parabolico è 2/3 del rettangolo circoscritto):

$$\frac{2}{3}\cdot 2\cdot a=\frac{8}{3}$$

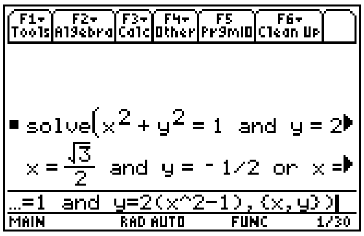
da cui $a = 2$, e l'equazione della parabola p è:

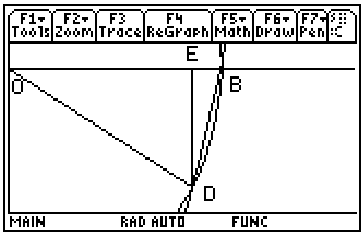
$$y = 2(x^2–1).$$

Questo significa che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico è un quadrato.



I punti di intersezione sono $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

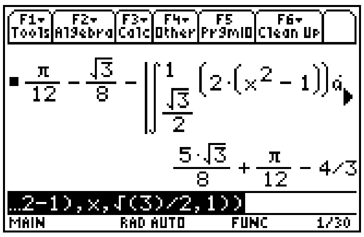




Calcoliamo le inesorabili aree. La parabola divide il cerchio in tre regioni di cui due sono congruenti: una di queste è la sottile striscia compresa tra i punti B e D.
Si può osservare che il settore circolare DOB, poiché $\angle DOB = \pi/6$ (ecco il signor RADICEDITRESUDUE all'opera), misura $\pi/12$ cm^2. A tale area si può sottrarre l'area sottesa dalla parabola

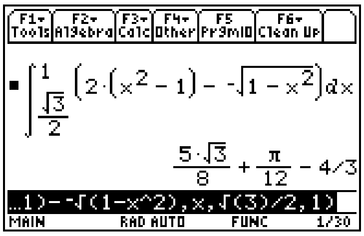
$$\left|\int_{\sqrt{3}/2}^{1} 2(x^2-1)\,dx\right|$$

e l'area del triangolo ODE ($=\sqrt{3}/8$ cm^2).



Oppure, più semplicemente, calcolando l'integrale definito

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1}\left(2(x^2-1)-^{-}\sqrt{1-x^2}\right)dx\approx 0.02.$$



Dunque la "maggiore di tali aree" misura

$$\pi - 2\left(\frac{5\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{4}{3}\right) = \frac{32 + 10\pi - 15\sqrt{3}}{12} \approx 3.12 \text{ cm}^2.$$

Il quesito (e) ha il tono del grottesco: vuole valutare, evidentemente, se il candidato sa fare una divisione, ma l'estensore del problema, che di certo non possiede una TI-89, sbaglia i calcoli (pretendendo che non li sbaglino i candidati) e dopo laboriose semplificazioni si inventa

$$\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3}$$

Ho particolarmente apprezzato lo studente che ha scritto: "Forse il testo è sbagliato, dato che se si cambia 22π in 10π si ottiene semplicemente $r = 2$."
Infine un'ultima osservazione: ben sappiamo che quando viene richiesta una "misura" in realtà l'insegnamento tradizionale si aspetta il (un) valore simbolico di quella misura, il che paradossalmente significa sostituire ad un oggetto semanticamente ben chiaro (l'area di una figura) con un'espressione oscura come

$$\frac{32 + 10\pi - 15\sqrt{3}}{12},$$

Non è più significativo approssimare tale area? Se il nostro autore l'avesse fatto si sarebbe accorto del proprio errore.

Problema 3. Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $\widehat{TAB}$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

a) Esprimere in funzione di x il rapporto:

$$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$$

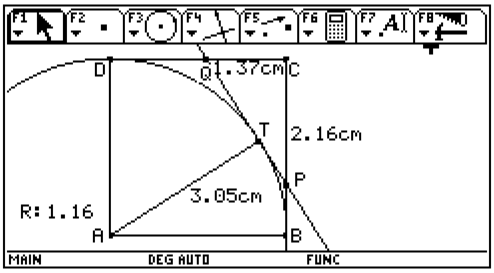
b) Studiare la funzione $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).
c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.
d) Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2\cdot\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}$$

e) Stabilire che risulta:

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Ecco un problema analogo a quelli che si davano un secolo fa. Con tanta pazienza accingiamoci alla risoluzione. Con la TI-92 costruiamo la figura; l'animazione del punto T mostra che il rapporto richiesto, che vale 1 quando T coincide con B oppure con D (cioè per x=0 o x=π/4) varia tra 1 e circa 1.17.



Ponendo senza alcun rimpianto $\overline{AT} = 1$ i punti P e Q hanno coordinate

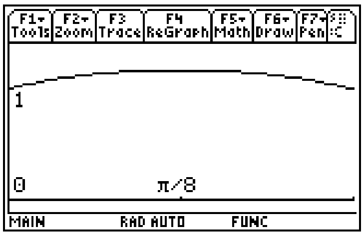
$$P(1, \tan x), \qquad Q\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right), 1\right),$$

di modo che

$$\overline{CP} = 1 - \tan x \qquad \text{e} \qquad \overline{CQ} = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

La funzione richiesta, nell'intervallo $[0, \pi/4]$, è dunque

$$f(x) = 2 - \tan x - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$



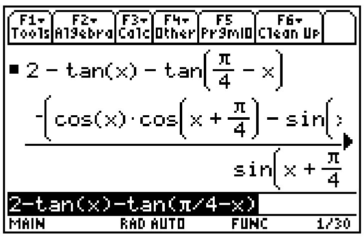
Il grafico è molto semplice, ed è suggerito dal problema geometrico, la cui soluzione è simmetrica rispetto a $\pi/8$, e in cui evidentemente c'è un massimo di ordinata

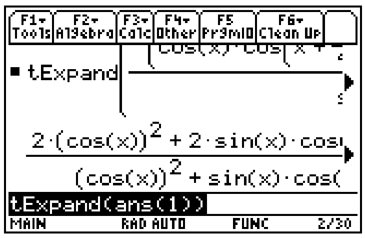
$$M = 2 - 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 1.17.$$

Quindi per $1 \le k \le M$ si hanno ancora due soluzioni simmetriche rispetto a $\pi/8$, e coincidenti per $x = \pi/8$.

Il quesito (d) è davvero inquietante. Che dire? Evidentemente il nostro autore è preoccupato per una certa decadenza della "filastrocca delle formule trigonometriche e delle loro meravigliose trasformazioni caleidoscopiche" (J. Dieudonné, Algébre linéaire et géométrie élémentaire). Bene, dal prossimo anno tutti gli insegnanti del regno torneranno all'ovile, e per altri secoli la gloria delle "formule" sarà salva.

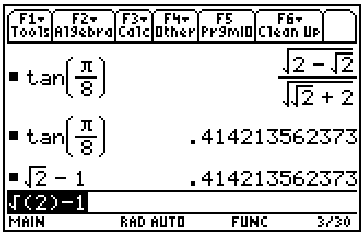
Lascio fare alla TI-89.





Dalla relazione pitagorica $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ e dalle formule di duplicazione si ottiene il risultato.

Quanto alla richiesta (e): davvero non è chiaro in che termini si possa valutare una risposta. Certo, si intuisce che l'autore vuole che il candidato si cimenti con epiche semplificazioni di austeri radicali. Lo deluderò.



Chi di noi può ora ragionevolmente dubitare del fatto che tan(π/8) sia uguale a $\sqrt{2}-1$? Sento già le strida del nostro autore: "ma così non hai dimostrato nulla, hai solo verificato che tan(π/8) e $\sqrt{2}-1$ hanno qualche cifra decimale in comune!". Bene: mi accontenterò di questo, esibendo quel poco buon senso che evidentemente manca a chi ritiene che possa lasciare qualche traccia di conoscenza e di cultura, o possa avere qualche barlume di interesse scientifico dimostrare che

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1\,.$$