INTEGRAZIONE NUMERICA

ANALISI SPERIMENTALE DEGLI ERRORI

Prof. Michele Impedovo

1. Introduzione

Il lavoro seguente è stato svolto in una quinta classe di liceo scientifico tradizionale.
Sia data una funzione f continua su un intervallo $[a, b]$; si consideri il problema di approssimare l'integrale definito

$$\mathrm{I} := \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

I tre classici metodi di integrazione numerica (metodo dei rettangoli, metodo dei trapezi, metodo di Simpson o delle parabole) corrispondono all'approssimare un arco della curva $y=f(x)$ con funzioni polinomiali rispettivamente di grado 0 (segmenti paralleli all'asse x), di grado 1 (segmenti non paralleli all'asse y), di grado 2 (archi di parabola). I tre metodi hanno in comune il punto di partenza: si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di ugual ampiezza $\Delta x := \dfrac{b-a}{n}$ mediante i punti di suddivisione

$$a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+n\Delta x=b$$

e di conseguenza si approssima I come somma di n termini

$$\mathrm{I} \approx \mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+ \ldots +\mathrm{A}_n.$$

Al tendere di n all'infinito tali somme (che chiameremo rispettivamente R_n, T_n, P_n) convergono allo stesso limite I.
Il problema che ci poniamo è il seguente: l'errore commesso dalle varie approssimazioni

$$E(R, n) := |R_n - \mathrm{I}|$$
$$E(T, n) := |T_n - \mathrm{I}|$$
$$E(P, n) := |P_n - \mathrm{I}|$$

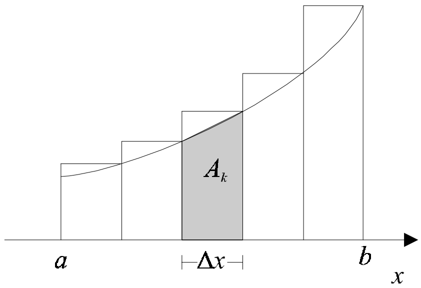
varia al variare di n; più precisamente tende a zero al tendere di n all'infinito. Qual è la relazione che lega E a n? Cercheremo sperimentalmente una risposta, lavorando su un esempio preciso:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1.$$

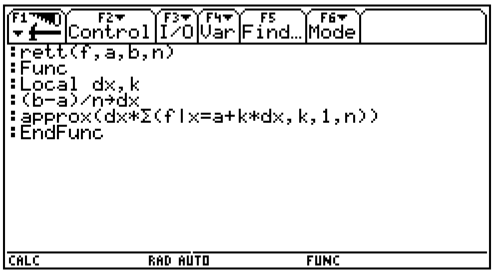
2. Metodo dei rettangoli

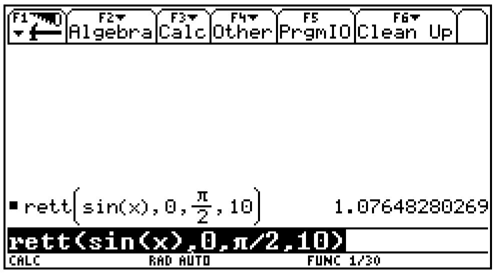
Il metodo dei rettangoli consiste nell'approssimare ciascun A_k utilizzando un rettangolo di base Δx e altezza $f(x_k)$, dove x_k appartiene all'intervallo $[a+(k-1)\Delta x,\ a+k\Delta x]$. Possiamo scegliere ad esempio come x_k l'estremo destro di ogni intervallo (la letteratura anglosassone chiama *rightbox* questo metodo). Allora l'approssimazione R_n di I è data da

$$R_n := \Delta x \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x).$$

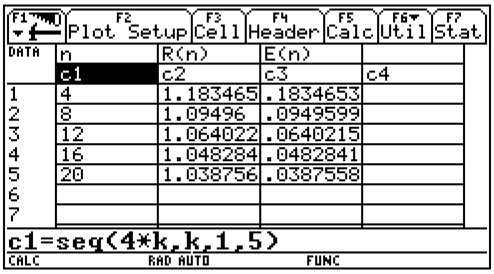


L'algoritmo che implementa tale approssimazione è il seguente.

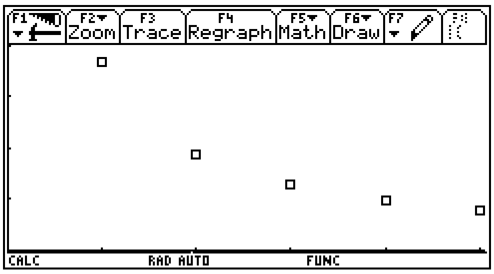




Per analizzare sperimentalmente gli errori al variare di n compiliamo innanzitutto la seguente tabella, scegliendo diversi valori per n (4, 8, 12, 16, 20), calcolando le corrispondenti approssimazioni R_n e gli errori $E_n = | R_n - 1 |$.



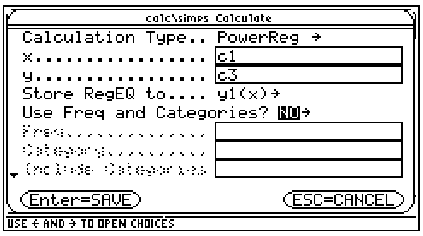
Sono tutte approssimazioni per eccesso, dato che $f(x)$ è crescente. Costruiamo ora il grafico dei punti (n, E_n). Il rettangolo di visualizzazione è $[0, 20]\times[0, 0.2]$.

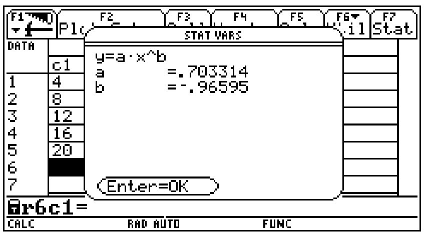


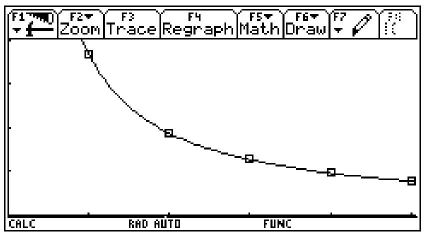
Come si vede gli errori, al crescere di n, si dispongono su una curva regolare, che a prima vista sembra una potenza negativa di n. Quale?

Cerchiamo il miglior fit dei nostri punti con una *funzione potenza*, cioè una funzione del tipo

$$x \to A\, x^B.$$







Il fit è convincente. Sperimentalmente abbiamo trovato che l'errore dell'approssimazione R_n è circa

$$E_n = \frac{0.7}{n},$$

cioè è proporzionale a $1/n$. Se ci fidiamo di questo risultato dobbiamo concludere che per approssimare la terza cifra decimale di I, cioè affinché sia

$$E < 0.5 \cdot 10^3$$

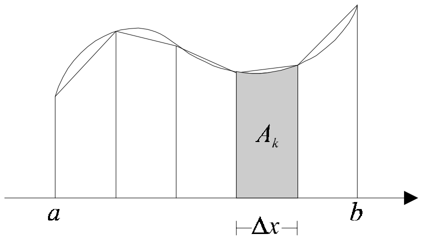
$$\frac{0.7}{n} < 0.5 \cdot 10^3$$

deve essere almeno $n > 1400$.

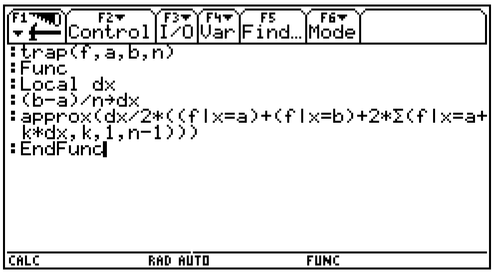
3. Metodo dei trapezi

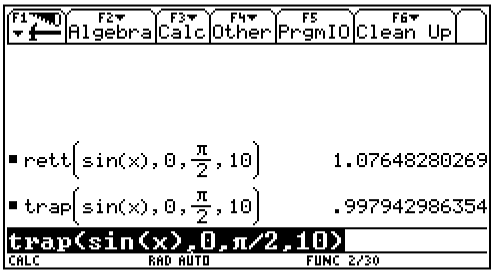
Il metodo dei trapezi consiste nell'approssimare ciascun A_k utilizzando il trapezio di altezza Δx e basi $f\left(a+(k-1)\Delta x\right)$ e $f\left(a+k\Delta x\right)$. Allora l'approssimazione T_n di I è data da

$$T_n := \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\Delta x) \right)$$

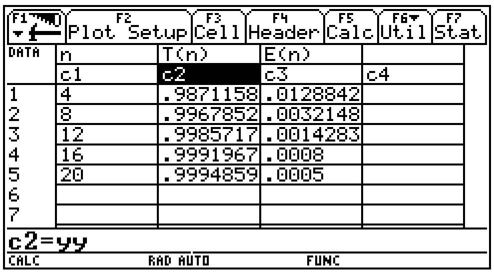


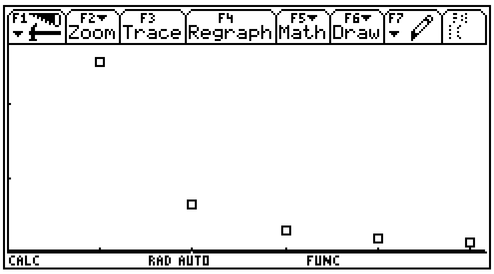
L'algoritmo è il seguente.



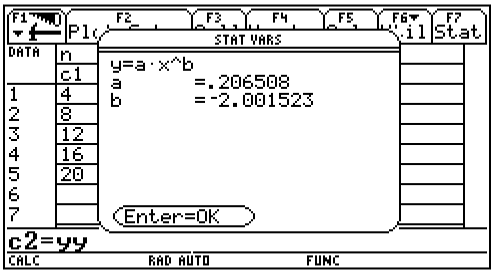


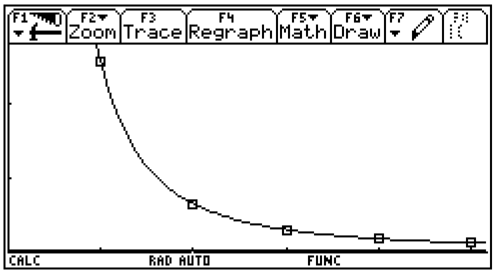
Per analizzare il comportamento degli errori al variare di n operiamo nel modo già visto, costruendo la tabella e il grafico dei punti (n, E_n). Il rettangolo di visualizzazione è [0, 20]×[0, 0.014].





Sono tutte approssimazioni per difetto, dato che $f(x)$ ha la concavità verso il basso. Gli errori sembrano ora schiacciarsi più rapidamente a zero. Come prima, ipotizziamo come fit una funzione potenza, che dovrebbe avere ora un esponente minore.





Il fit è convincente. L'errore dell'approssimazione T_n è circa

$$E_n = \frac{0.2}{n^2},$$

cioè è proporzionale a $1/n^2$. Sulla base di questo risultato concludiamo che per approssimare la terza cifra decimale, cioè affinché sia

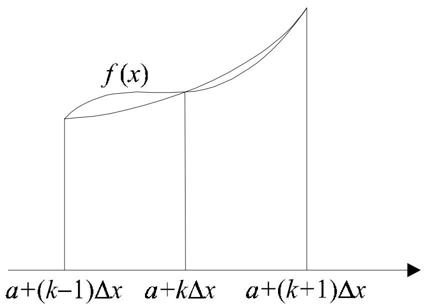
$$E < 0.5 \cdot 10^3$$

$$\frac{0.2}{n^2} < 0.5 \cdot 10^3$$

deve essere almeno $n > 20$.

4. Metodo di Simpson (delle parabole)

- Il metodo delle parabole consiste nell'approssimare l'arco di curva $y=f(x)$ compreso tra i punti di ascisse $a+(k-1)\Delta x$, $a+k\Delta x$, $a+(k+1)\Delta x$ utilizzando l'arco di parabola passante per tali punti.



Teorema. L'approssimazione P_n di I, con n pari, è data da

$$P_n := \frac{\Delta x}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f\big(a + (2k+1)\Delta x\big) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f\big(a + (2k)\Delta x\big) \right)$$

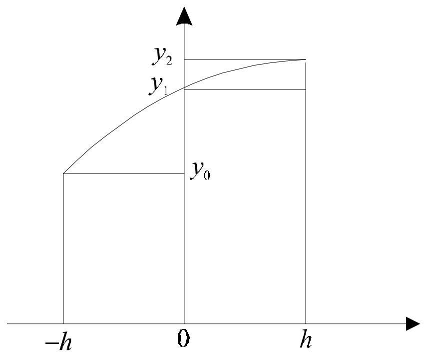
Dimostrazione. Calcoliamo innanzitutto l'area S sottesa da una funzione quadratica nell'intervallo $[x_0-h, x_0+h]$. Dimostriamo che risulta

$$S = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx\, y = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right),$$

dove

$$y_0=f(x_0-h), \qquad y_1 = f(x_0), \qquad y_2 = f(x_0+h).$$

Per semplificare, utilizziamo un sistema di riferimento in cui $x_0=0$.



Allora

$$S = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right).$$

Imponendo che la parabola passi per i punti $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) abbiamo

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

da cui

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

e quindi

$$S = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Dobbiamo ora sommare tutti i contributi delle parabole passanti per i punti di ordinata

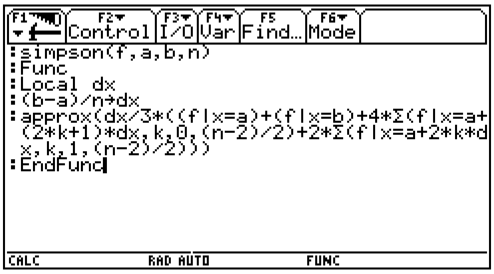
$$y_0, y_1, y_2,$$
$$y_2, y_3, y_4,$$
$$\ldots$$
$$y_{n-2}, y_{n-1}, y_n.$$

Risulta dunque

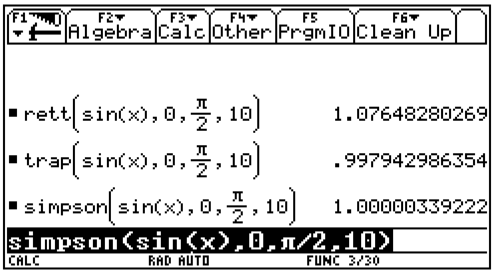
$$S = \frac{h}{3}\left(\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \ldots + \left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

da cui la tesi.

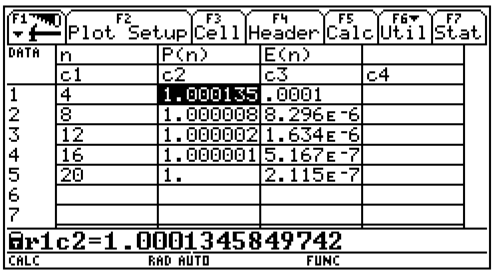
L'algoritmo è il seguente.



```
:simpson(f,a,b,n)
:Func
:Local dx
:(b-a)/n→dx
:approx(dx/3*((f|x=a)+(f|x=b)+4*Σ(f|x=a+(2*k+1)*dx,k,0,(n-2)/2)+2*Σ(f|x=a+2*k*dx,k,1,(n-2)/2)))
:EndFunc
```

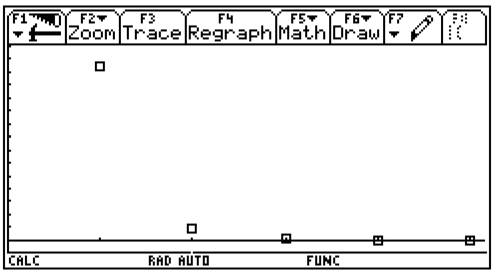


Come prima, costruiamo tabella e grafico dei punti (n, E_n). Il rettangolo di visualizzazione è $[0, 20]\times[0, 0.00015]$.

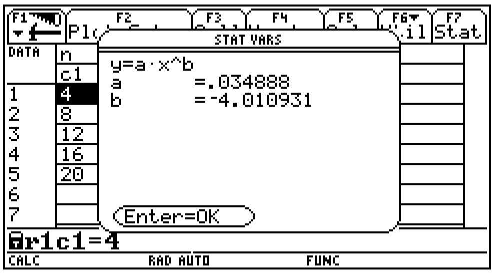


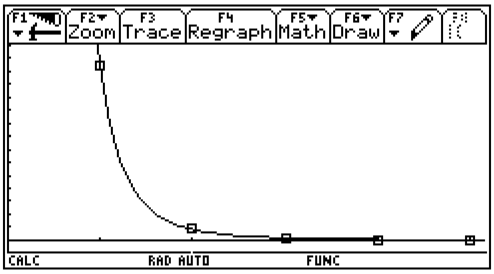
DATA	n	P(n)	E(n)	
	c1	c2	c3	c4
1	4	1.000135	.0001	
2	8	1.000008	8.296E-6	
3	12	1.000002	1.634E-6	
4	16	1.000001	5.167E-7	
5	20	1.	2.115E-7	
6				
7				

r1c2=1.0001345849742



Gli errori si schiacciano a zero molto più rapidamente che nei due casi precedenti. Ancora, ipotizziamo come fit una funzione potenza.





Il fit è convincente. L'errore dell'approssimazione P_n è circa

$$E_n = \frac{0.035}{n^4},$$

cioè è proporzionale a $1/n^4$. Sulla base di questo risultato concludiamo che per approssimare la terza cifra decimale, cioè affinché sia

$$E < 0.5 \cdot 10^3$$

$$\frac{0.035}{n^4} < 0.5 \cdot 10^3$$

deve essere solamente $n > 2$.

5. Conclusioni

Volutamente non sono state svolte considerazioni teoriche sulla maggiorazione dell'errore nelle tre approssimazioni. Le analisi hanno portato comunque a risultati che, sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione $f(x)$, sono corretti (dipendenza da $1/n$, da $1/n^2$, da $1/n^4$), come si può controllare su qualunque testo di Analisi Numerica.
Tuttavia lo scopo dell'attività è stato un altro: sfruttare ambienti diversi (calcolo, programmazione, grafico, tabella, fitting) per arrivare ad osservare e capire una regolarità (una legge, una funzione) che lega due grandezze; in questo caso lega E (la differenza tra l'integrale e la sua approssimazione) a n (il numero di suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$). Più che l'analisi degli errori in una integrazione numerica lo scopo vero di tale attività è stato invitare gli studenti a formulare congetture sull'esistenza e sulla forma di una funzione.
In un certo senso tale attività è didatticamente più produttiva della dimostrazione dei relativi teoremi:

- è più convincente: il grafico dei punti (n, E_n) realizza una forte esperienza matematica, che spinge in modo naturale a descrivere il mutuo comportamento di due grandezze;
- è più abbordabile: sia dal punto vista teorico (la dimostrazione dei teoremi non è banale ed è solitamente trascurata anche nei corsi universitari) sia dal punto di vista numerico (occorre maggiorare il valore assoluto delle derivate di ordine superiore di $f(x)$, cosa non facile, se non in casi molto semplici).
- è più generale: coinvolge aspetti concettuali ed operativi diversi, cerca un risultato anziché assumerlo; in un certo senso è un esempio di attività che vuole andare nella direzione diametralmente opposta rispetto a quella prescrittiva che tanto ha nuociuto all'insegnamento della matematica. I risultati, per ora, sono confortanti.