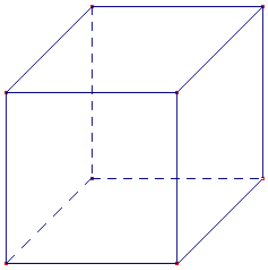
Quello non è un cubo!

Matematica e Disegno: l'ASSONOMETRIA

Liceo Scientifico Statale "Galileo Ferraris" di Varese
anno scolastico 2000/2001
Classe IV E

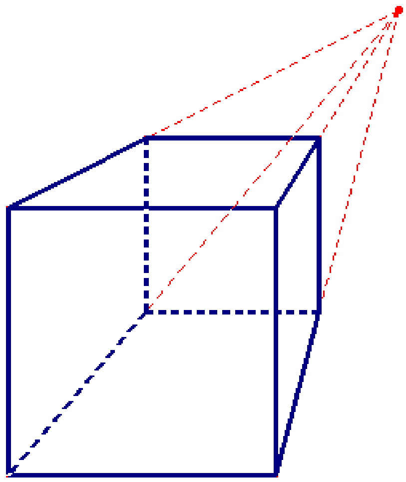
Introduzione

Chiedete ad una persona qualsiasi: "Che cos'è?"

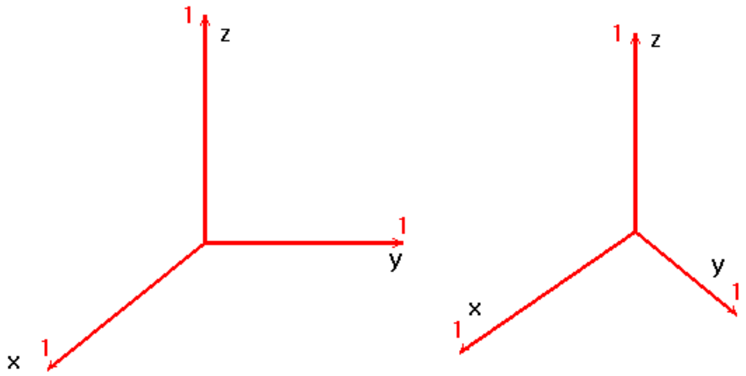


Tutti risponderanno "Un cubo!".
Noi sappiamo che NON è un cubo, se non altro perché quella sopra disegnata è una figura piana e non un solido tridimensionale!
In realtà sono disegnati due quadrati e quattro parallelogrammi, alcuni lati sono tratteggiati. Non tanto per motivi di percezione quanto per motivi culturali ci sembra di "vedere" un cubo.
Avete in mente René Magritte e il suo "Questa non è una pipa"? Ovvio, non ci si può fumare!

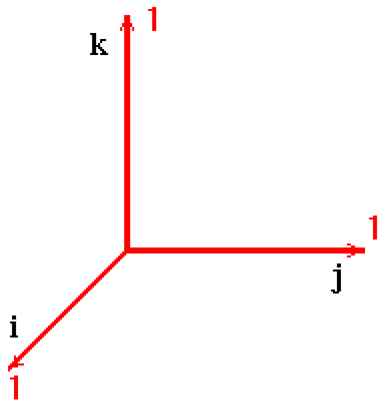
Si tratta in realtà della rappresentazione di una pipa: si tratta di una "trasformazione" di un oggetto in un altro. A noi interessano le "trasformazioni geometriche" che trasformano un oggetto tridimensionale in un oggetto bidimensionale, disegnabile perciò su un foglio di carta.
La prima figura è la rappresentazione di un cubo sul piano (il cosiddetto "quadro") ottenuta scegliendo un particolare metodo di rappresentazione: l'ASSONOMETRIA.
L'assonometria è importante perché conserva il parallelismo: rette parallele nello spazio vengono rappresentate come rette parallele sul quadro (un quadrato si trasforma in un parallelogrammo). Questo non accade, per esempio, nella prospettiva, in cui rette parallele vengono trasformate in rette che si intersecano in un "punto di fuga".



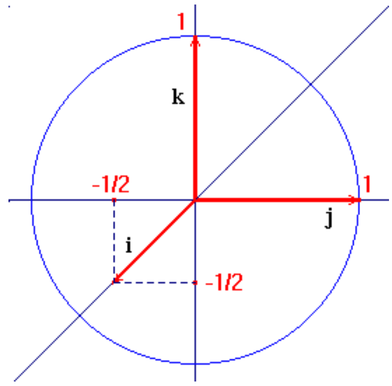
L'assonometria cavaliera
Esistono infinite rappresentazioni assonometriche, a seconda della direzione dell'osservatore. Tutto quello che occorre per è stabilire come rappresentare sul quadro i tre **versori** degli assi, cioè i tre vettori di modulo 1 diretti come l'asse x, l'asse y, l'asse z: li chiameremo rispettivamente **i**, **j**, **k**. Solitamente **k** è rappresentato da un vettore verticale, mentre **i** e **j** si aprono secondo un certo angolo per dare l'idea della profondità. Ecco due esempi.



Noi fisseremo una particolare assonometria che è chiamata *cavaliera*. L'assonometria cavaliera, molto utilizzata nei libri di testo, è quella che sceglie la seguente rappresentazione.



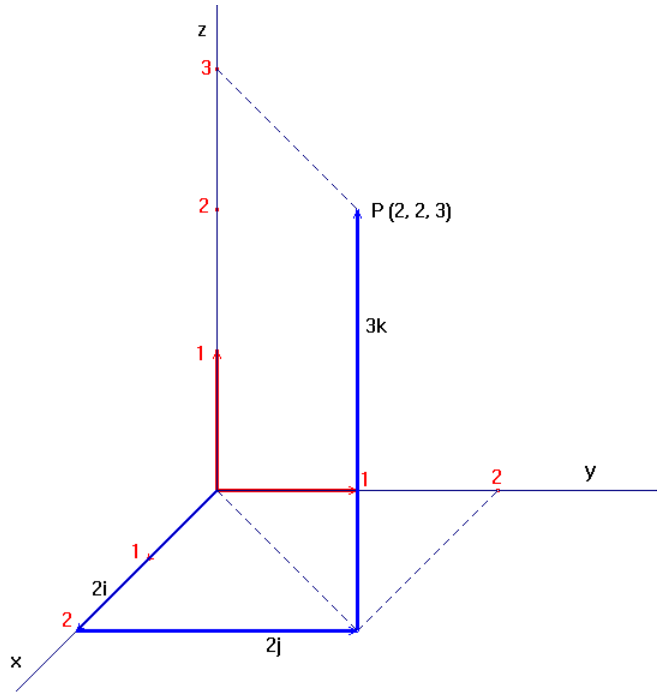
I versori **j** e **k** sono rappresentati da due vettori perpendicolari e di ugual lunghezza, mentre **i** viene rappresentato mediante un vettore che ha la direzione della bisettrice del terzo quadrante e lunghezza pari alla diagonale di un quadrato di lato 1/2, come nella figura seguente.



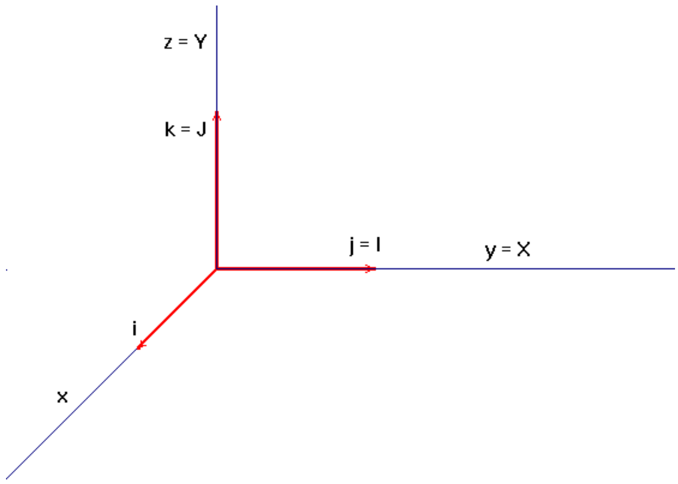
Fissata la rappresentazione sul quadro dei tre versori, la posizione di qualunque punto è univocamente determinata. La rappresentazione di un punto $P(x, y, z)$ sul quadro si ottiene semplicemente sommando tre vettori:

$$\underline{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

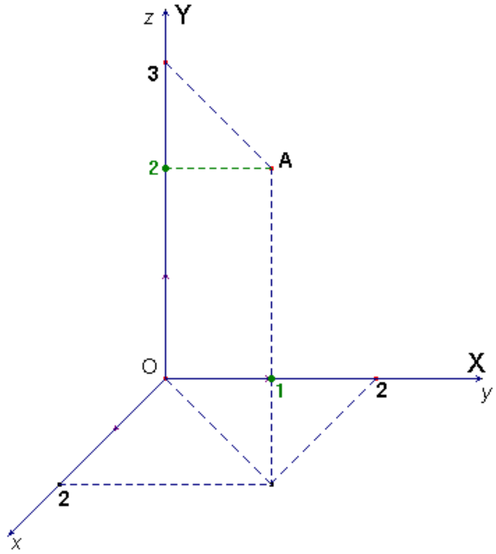
dove per esempio $x\mathbf{i}$ è il multiplo secondo il numero x del vettore **i**.
Ecco per esempio la costruzione del punto $P(2, 2, 3)$.



Ora fissiamo anche sul piano del quadro un sistema di riferimento OXY bidimensionale: per esempio l'asse X coincide con l'asse y (il versore **j** coincide con il versore **I**) e l'asse Y coincide con l'asse z, (il versore **k** coincide con il versore **J**).



Allora un punto dello spazio $P(x, y, z)$ viene trasformato in un punto $P'(X,Y)$ che sta sul quadro, e che lo rappresenta nell'assonometria.



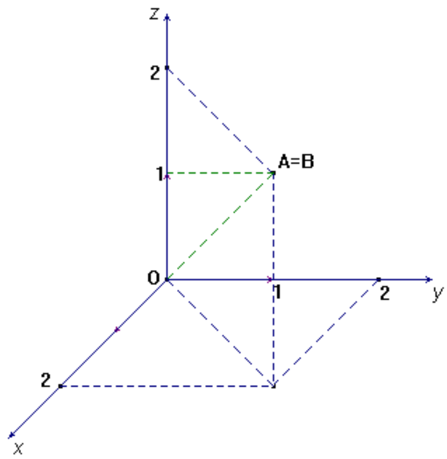
Se prendiamo un punto nello spazio, ad esempio $A(2, 2, 3)$, considerando la sua posizione rispetto agli assi X e Y, troveremo che le sue nuove coordinate sul quadro sono $A'(1, 2)$.

$$(2, 2, 3) \to (1, 2)$$

Poiché ad ogni punto nello spazio corrisponde sempre un solo punto nel quadro, deve esistere una relazione che lega le coordinate spaziali alle coordinate nel quadro

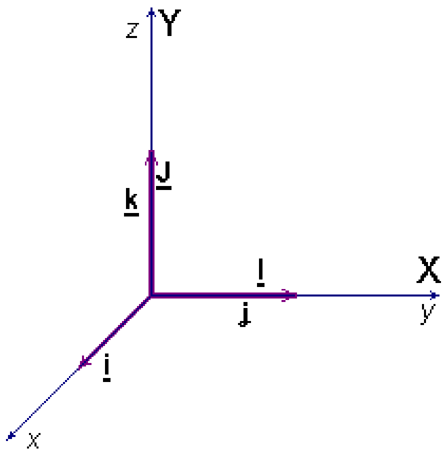
$$(x, y, z) \to (X, Y).$$

Innanzitutto possiamo notare che questa relazione non è biunivoca: ad un punto (X, Y) sul quadro corrispondono infiniti punti (x, y, z). Ecco perché può capitare che due o più punti, come $(0, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$, sul quadro risultino coincidenti. Infatti in questi casi la posizione dell'osservatore è allineata con i punti.



Ma qual è la trasformazione che, dato un punto (x, y, z) nello spazio ci permette di trovare la sua rappresentazione (X, Y) sul quadro?

È sufficiente esprimere i versori dello spazio **i**, **j** e **k** in funzione dei versori del piano **I** e **J**:



$$\begin{cases} \mathbf{j} = \mathbf{I} \\ \mathbf{k} = \mathbf{J} \\ \mathbf{i} = -\frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{J} \end{cases}$$

Sapendo che il generico punto $P(x, y, z)$ è individuato dal vettore

$$\underline{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

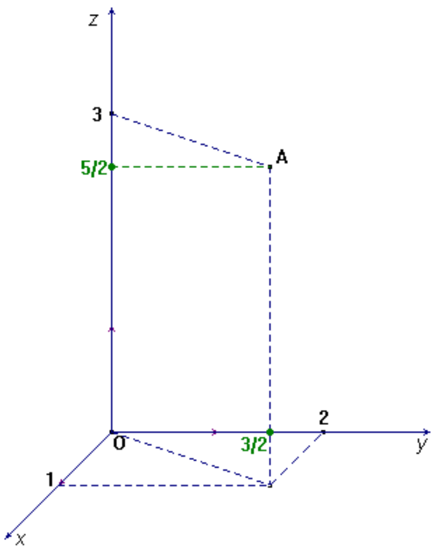
possiamo sostituire:

$$\begin{aligned} \underline{OP} &= x\left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{J}\right) + y\mathbf{I} + z\mathbf{J} \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + y\right)\mathbf{I} + \left(-\frac{1}{2}x + z\right)\mathbf{J} \end{aligned}$$

La trasformazione che, dato un punto nello spazio, ci permette di trovare la rappresentazione sul quadro in assonometria cavaliera è quindi

$$\boxed{(x, y, z) \to \left(-\frac{1}{2}x + y, -\frac{1}{2}x + z\right)}$$

Per esempio $A(1, 2, 3) \to A'\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

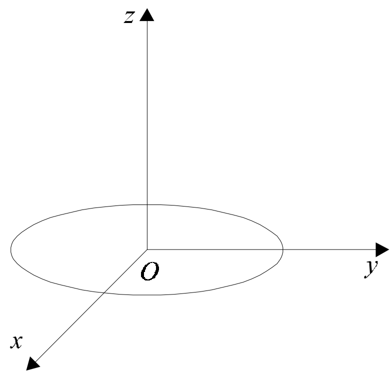


Vediamo ora alcuni esempi in cui sfruttiamo questo formidabile strumento.

Circonferenze nello spazio

L'assonometria trasforma quadrati in parallelogrammi e trasforma la circonferenza inscritta nel quadrato in una figura inscritta nel parallelogrammo: tale figura è una ellisse.

Come si rappresenta la circonferenza sul piano xy di raggio 1 e centro nell'origine (0,0,0)? Poiché Su qualche libro di testo viene rappresentata in questo modo.



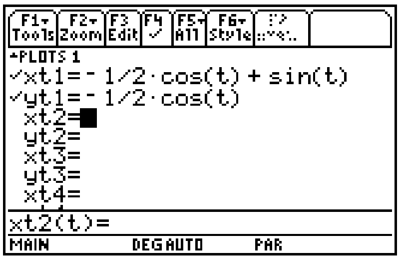
Questa raffigurazione, come vedremo, è completamente sbagliata. Per ottenere una rappresentazione fedele di una circonferenza nello spazio bisogna esprimere le coordinate generiche di un punto su di essa in forma parametrica e trasformare poi questo punto sul quadro.
Nel caso della circonferenza di centro *O* e raggio 1 che giace sul piano *xy* le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

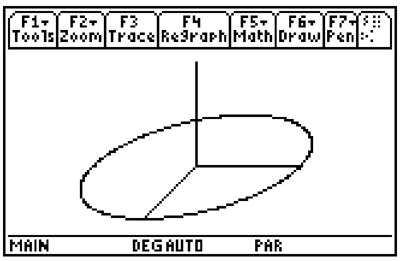
Mediante la trasformazione dell'assonometria cavaliera otteniamo le equazioni parametriche della circonferenza sul quadro.

$$\begin{cases} X = -\dfrac{1}{2}\cos(t) + \sin(t) \\ Y = -\dfrac{1}{2}\cos(t) \end{cases}$$

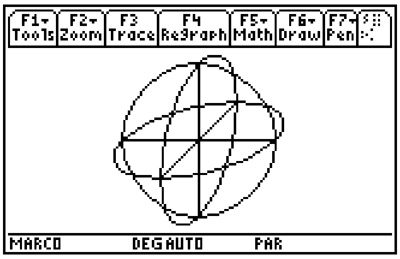
Questa circonferenza può essere rappresentata anche sulla nostra calcolatrice TI-89 inserendo nell'ambiente Parametric le due equazioni ottenute e facendo variare il parametro *t* da 0 a 360.



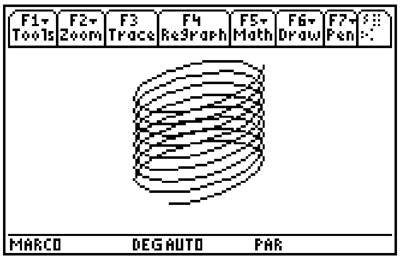
Se vogliamo rappresentare anche i tre assi dello spazio possiamo utilizzare il comando Line.
asse *x*: Line 0,0,-0.5,-0.5
asse *y*: Line 0,0,1,0
asse *z*: Line 0,0,0,1



Ecco come si disegna correttamente quella circonferenza!
Con lo stesso procedimento possiamo ottenere anche le equazioni parametriche delle circonferenze giacenti sui piani *xz* e *yz* aventi raggio 1 e centro O. Rappresentando le 3 circonferenze si può intuire la rappresentazione di una sfera.



Sostituiamo ora nelle equazioni parametriche della circonferenza sul piano *xy* alla componente z=0 la componente z=t. Mentre il punto ruota sale lungo l'asse z creando un'**elica cilindrica**.

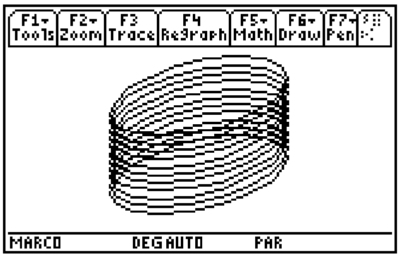


Possiamo anche creare altri solidi come il cilindro e il cono e rappresentarli graficamente.
Per il cilindro posso rappresentare più circonferenze con lo stesso raggio ma ad altezze differenti, quindi la componente z dovrà variare da un certo valore ad un altro con intervalli molto piccoli. Possiamo utilizzare il comando seq della calcolatrice:

seq(a,a,0,1,0.1)

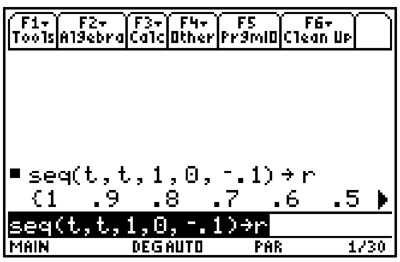
genera una lista di numeri da 0 a 1 con passo 0.1.
Le equazioni parametriche, rispettivamente nello spazio e nel piano sono le seguenti:

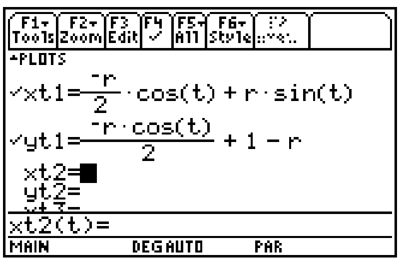
$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = sin(t) \\ z = seq(a,a,0,1,0.1) \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -\frac{1}{2}\cos(t) + sin(t) \\ Y = -\frac{1}{2}\cos(t) + seq(a,a,0,1,0.1) \end{cases}$$

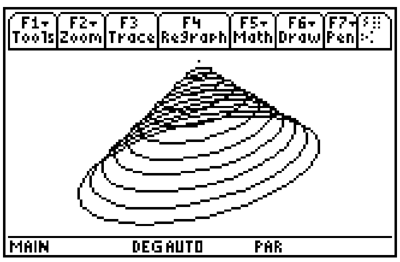


Per rappresentare il cono con la base sul piano *xy* possiamo tracciare più circonferenze con raggio r che decresce da 1 a 0 e sui piani $z = 1-r$. Posto $r = \text{seq}(k, k, 1, 0, -0.1)$ risulta

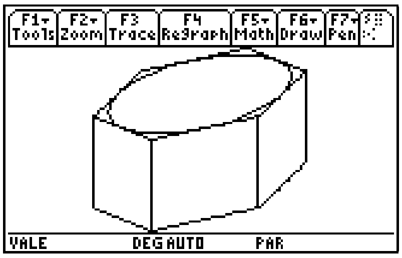
$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \\ z = 1-r \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -\frac{1}{2}r\cos(t) + r\sin(t) \\ Y = -\frac{1}{2}r\cos(t) + 1 - r \end{cases}$$

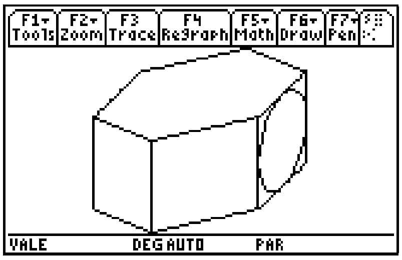


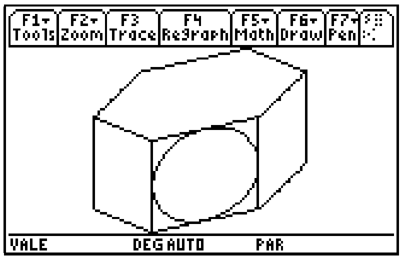


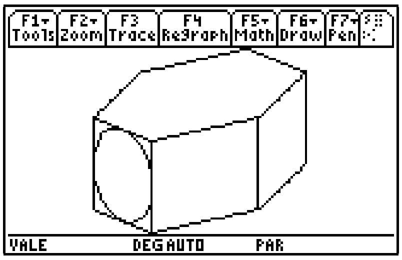


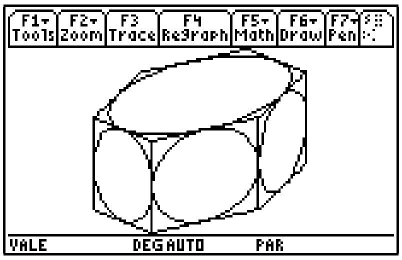
Disegnare un prisma esagonale (I)
Si vuole ottenere, con la TI-89 sempre in ambiente Parametric, un prisma che ha per base un esagono regolare; in ciascuna faccia visibile è inscritta una circonferenza.
Conoscendo le equazioni della assonometria cavaliera abbiamo applicato tale trasformazione sia agli spigoli sia alle circonferenze inscritte nelle facce visibili; però il passaggio più difficile, poiché nuovo, è stato comprendere come queste ultime ruotassero intorno all'origine.
Il parametro t deve essere compreso tra 0 e 360 per disegnare le circonferenze, ma se si vuol disegnare solamente una volta gli spigoli, sarà necessario dividere t per 360, altrimenti gli spigoli verranno disegnati 360 volte. Il prisma ha la base sul piano xy, centro in (0,0,1), lati e altezze misurano 1 e ciascuno spigolo del prisma appartiene alla retta che ha come punto di partenza uno dei due suoi vertici e come vettore direzione il vettore che unisce i due vertici.



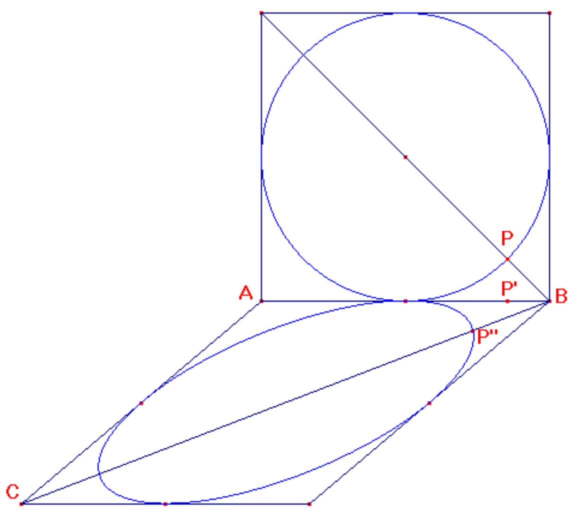




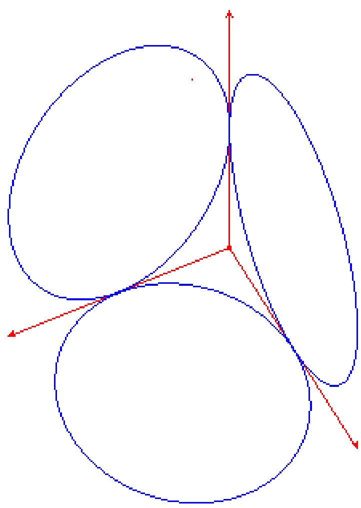




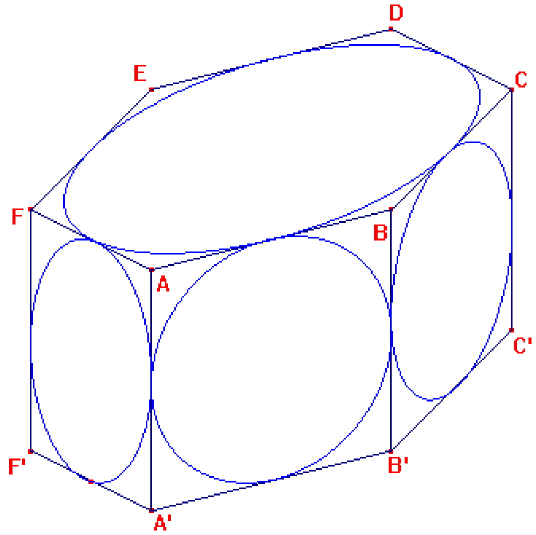
Disegnare un prisma esagonale (II, la vendetta)
Un altro gruppo ha lavorato con Cabri; in questo ambiente non ci sono equazioni, e il nocciolo del problema è quello di trasformare una circonferenza inscritta in un quadrato nella corrispondente ellisse inscritta nel parallelogrammo. Cabri possiede un comando con il quale è possibile costruire la conica che passa per cinque punti dati. Quattro punti dell'ellisse si trovano subito: sono i punti medi dei lati del parallelogrammo. Il quinto punto viene costruito nel seguente modo: il punto P (intersezione della circonferenza con una diagonale del quadrato) viene proiettato sul lato AB, trovando P'. P' a sua volta viene proiettato parallelamente ad AC, fino ad intersecare la diagonale corrispondente del parallelogrammo, trovando così P''.



La conica per i quattro punti medi dei lati del parallelogrammo e per P'' è l'ellisse cercata. Ora è possibile definire una **macro** (cioè una funzione memorizzata da Cabri) che prende in ingresso due vettori $\underline{AB}$ e $\underline{AC}$ e fornisce in uscita l'ellisse inscritta nel parallelogrammo definito dai vettori $\underline{AB}$ e $\underline{AC}$.

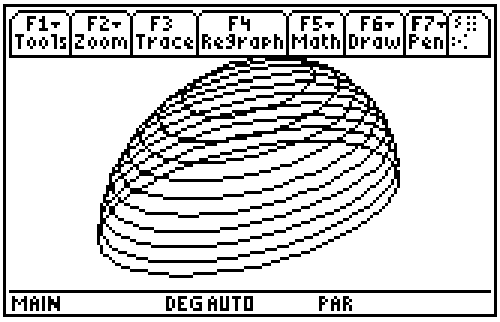


Con questa macro, una volta costruito il prisma esagonale, è facile rappresentare le circonferenze inscritte nelle facce laterali. Per la circonferenza inscritta nella faccia superiore è sufficiente osservare che passa per i punti medi dei lati.

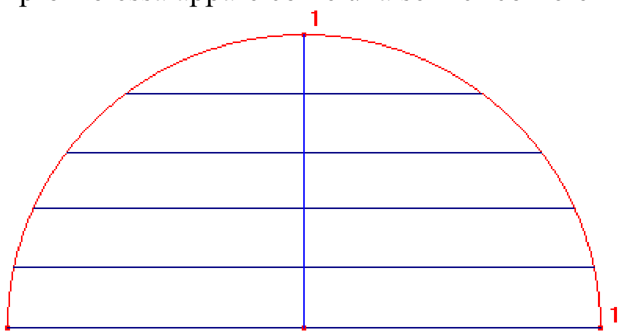


Disegnare una semisfera

Si vuole ottenere con laTI-89 in ambiente Parametric, il seguente disegno: esso mostra la semisfera che ha per base il cerchio di raggio 1 sul piano *xy*, ottenuta disegnando 10 circonferenze il cui raggio è tale da seguire il profilo della semisfera.



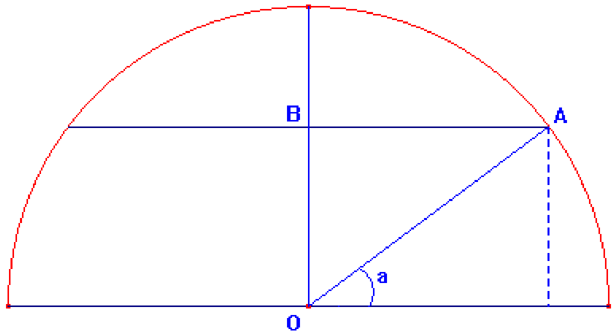
Osservando la semisfera di profilo essa appare come una semicirconferenza.



Da questa rappresentazione risulta evidente che, in ognuna delle circonferenze che compongono la semisfera, l'altezza varia in modo costante mentre il raggio varia a seconda dell'altezza.
L'altezza dovrà assumere valori compresi tra 0 e 1 con passo 1/10 perché le circonferenze sono 11 con quella di raggio 0. Quindi la componente *z* delle equazioni parametriche è determinata.

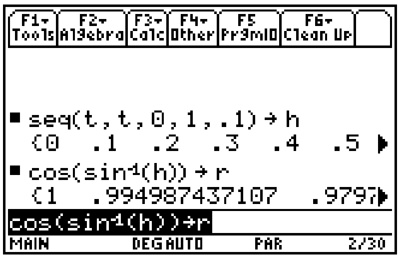
$$h = \text{seq}\left(a, a, 0, 1, \frac{1}{10}\right)$$

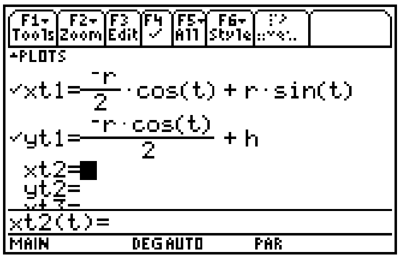
Vediamo come determinare i raggi corrispondenti.



Tracciando il raggio $\overline{OA} = 1$ dal centro della semisfera, si nota che il raggio $\overline{AB}$ della circonferenza posta a quell'altezza è uguale al coseno dell'angolo α compreso tra la base della semisfera e il raggio $\overline{OA}$. Ma α può essere facilmente calcolato perché il suo seno è proprio l'altezza $\overline{OB} = z$ che è già nota. Il raggio di ognuna delle venti circonferenze sarà quindi:

$$r = \cos\left(\sin^{-1}(h)\right)$$

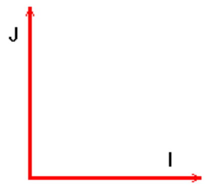


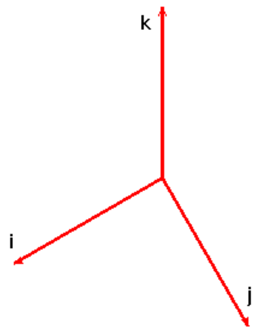


A questo punto si possono scrivere le equazioni parametriche delle ventuno circonferenze nello spazio e nel piano:

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \\ z = h \end{cases} \quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2}r\cos(t) + r\sin(t) \\ Y = -\dfrac{1}{2}r\cos(t) + h \end{cases}$$

L'assonometria isometrica (30° - 60°)





Un'altra assonometria utilizzata, soprattutto in Disegno, è l'assonometria "isometrica". Nell'assonometria isometrica **i** è ruotato di un angolo −150° rispetto a **I**; **j** è ruotato di −60° rispetto a **I**; il versore **k** coincide con **J**. Le lunghezze dei versori sono uguali.
Determinare la legge della trasformazione che muta un punto (x, y, z) dello spazio nel suo corrispondente sul quadro non è difficile. Utilizzando lo stesso procedimento visto prima otteniamo

$$(x, y, z) \to \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + z \right)$$

Vediamo, come applicazione, come costruire le tre circonferenze sui tre piani coordinati, di raggio 1 e tangenti agli assi.
Equazione della circonferenza sul piano xy:

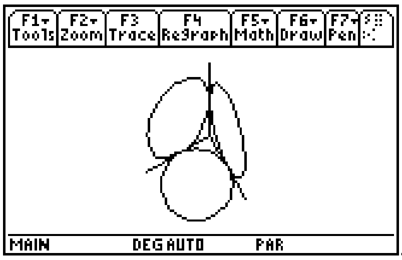
$$\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = 1 + \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos(t) + \dfrac{1}{4}\sin(t) + \dfrac{1}{4} \\ Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(t) - \dfrac{1}{4}\cos(t) - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Equazione della circonferenza su xz:

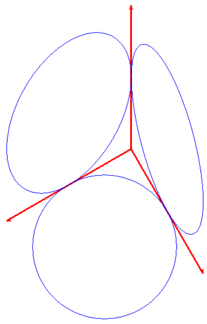
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(t) \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos(t) \\ Y = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t) + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Equazione della circonferenza su yz:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(t) \\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\cos(t) \\ Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t) + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



.



Conclusioni

Insomma, rappresentare una figura tridimensionale sul piano utilizzando la matematica e non la matita non è affatto banale. L'assonometria è bella perché la trasformazione dallo spazio al piano è determinata solamente dalla scelta dei tre versori. Una volta individuata l'equazione della trasformazione da (x, y, z) a (X, Y) non è più necessario pensare a questa trasformazione; ci pensa la matematica. Noi dobbiamo solo pensare alla figura nello spazio e determinarne le equazioni parametriche. Secondo noi abbiamo imparato un po' di matematica e ci siamo anche divertiti.