# Computer e grafica

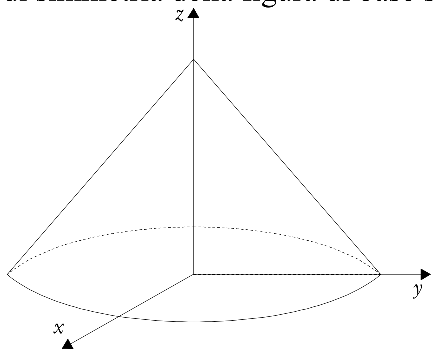
**Un'applicazione dell'algebra lineare alla geometria descrittiva**

Michele Impedovo

***Periodico Mathesis Milano, n° 15, 1998***

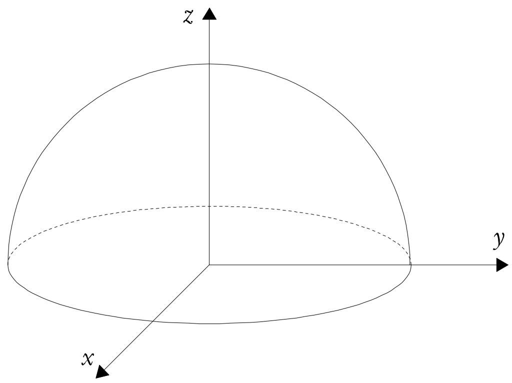
## 1. Il problema

Durante la correzione di un compito in classe (quarta liceo scientifico), in cui si chiedeva qualcosa a proposito di un cono, ho osservato che molti studenti disegnavano il cono (con il cerchio di base sul piano *xy* e centrato nell'origine) più o meno nel seguente modo (doppiamente scorretto: la proiezione di un cerchio è un'ellisse e quindi non può avere "punte", e comunque gli assi di simmetria della figura di base sono sbagliati).




Discutendo con gli studenti ho scoperto che in Disegno avevano sì studiato metodi assonometrici, ma che non collegavano per nulla quelle nozioni, apprese in un'altra disciplina, ad un compito di matematica.

D'altra parte anche su libri di testo ben curati dal punto di vista grafico, si propongono disegni di questo tipo:

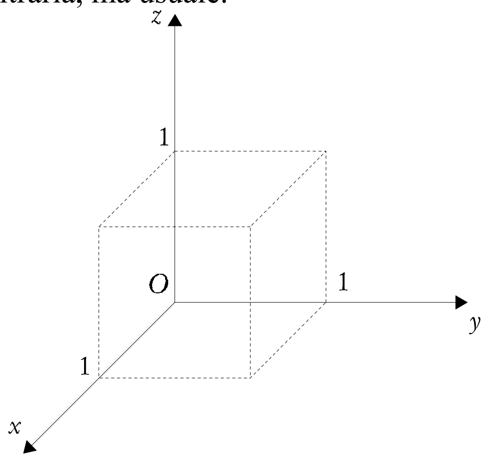



che sembrano corretti ma, come vedremo, non lo sono: le direzioni degli assi di simmetria dell'ellisse (che rappresenta il cerchio di base della semisfera) sono in contraddizione con la direzione dell'asse *x*. Da queste osservazioni è nato, con alcuni studenti, un lavoro interessante, che si è trasformato rapidamente in un'applicazione significativa dei concetti fondamentali di geometria lineare nello spazio, che erano stati svolti in precedenza.

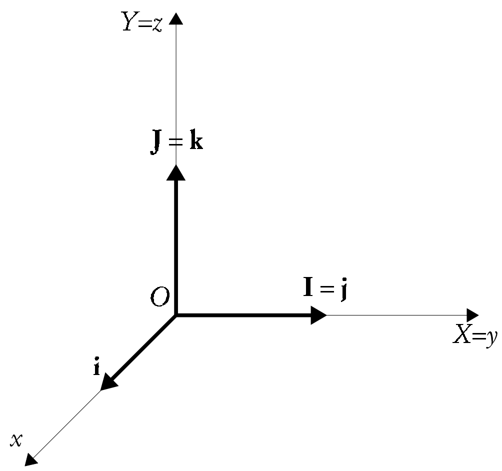
## 2. L'assonometria cavaliera

Come è noto, la disciplina che insegna a rappresentare su un piano (il foglio del disegno, chiamato *quadro*) le figure spaziali viene chiamata *geometria descrittiva*. Questa disciplina costituiva, anni fa, oggetto di un esame per il corso di laurea in Matematica. La rappresentazione delle figure spaziali su di un piano si ottiene mediante proiezioni o

sezioni: quindi la geometria descrittiva si riduce all'applicazione delle nozioni fondamentali di geometria proiettiva.
Uno dei metodi più semplici consiste nel proiettare i punti della figura da un centro all'infinito (*proiezione parallela*).
Tale proiezione, poiché il centro è un punto improprio, gode di una proprietà fondamentale: conserva il parallelismo. Si tratta quindi di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^3$ (l'insieme dei punti dello spazio) a $\mathbf{R}^2$ (l'insieme dei punti di un piano, il quadro).
Scegliamo il centro di proiezione in modo tale che il piano $yz$ coincida con il piano del disegno (il quadro), e in modo che la proiezione dell'asse $x$ formi un angolo di 45° con le proiezioni degli assi $y$ e $z$, come nella figura seguente, in cui l'asse $x$ sembra "bucare" il piano del foglio. Il punto (1,0,0) di $\mathbf{R}^3$ è trasformato nel punto (–1/2,–1/2) del quadro: la scelta del numero 1/2 è arbitraria, ma usuale.




Questa rappresentazione è quella che viene di solito utilizzata (più o meno consciamente) nella pratica di insegnamento e nei testi scolastici, ed è chiamata **assonometria cavaliera**.
Il centro di proiezione è in questo caso il punto improprio di coordinate omogenee (2,1,1,0), cioè la direzione di proiezione è quella del vettore **v**=[2,1,1].
Indichiamo con **i**, **j**, **k** le proiezioni sul quadro dei versori fondamentali di $\mathbf{R}^3$, e con **I**, **J** i versori fondamentali di $\mathbf{R}^2$.




L'assonometria cavaliera rappresenta dunque **i**, **j**, **k** nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{i} = -\frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{J} \\ \mathbf{j} = \mathbf{I} \\ \mathbf{k} = \mathbf{J} \end{cases}$$

Come si rappresenta sul quadro *XY* un generico punto $P(x,y,z)$ dello spazio? Risulta

$$\underline{OP} = [x, y, z] = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = x\left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{J}\right) + y\mathbf{I} + z\mathbf{J} = \left(-\frac{1}{2}x + y\right)\mathbf{I} + \left(-\frac{1}{2}x + z\right)\mathbf{J}$$

La trasformazione cercata è dunque la seguente:

$$\boxed{(x, y, z) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}x + y, -\frac{1}{2}x + z\right)}$$

e in forma matriciale:

$$\boxed{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

**Possiamo concludere che l'assonometria cavaliera è pienamente descritta dalla matrice**

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**3. La soluzione**

Possediamo ora tutti gli elementi per risolvere il problema iniziale. Come si disegna in assonometria cavaliera la circonferenza $\gamma$ di centro $O$ e raggio 1 del piano $xy$? Essa ha in $\mathbf{R}^3$ equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

cioè è il luogo dei punti $P$ tali che $\underline{OP}$=[cos($t$),sin($t$),0]. Eseguiamo la trasformazione precedentemente trovata

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + \sin(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) \end{bmatrix}$$

Otteniamo dunque la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2}\cos(t) + \sin(t) \\ Y = -\frac{1}{2}\cos(t) \end{cases}$$

Eliminando il parametro $t$ otteniamo l'equazione:

$$X^2-2XY+5Y^2-1=0$$

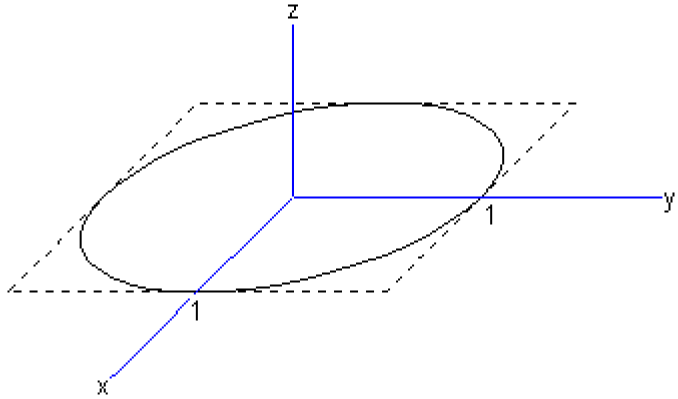
Si tratta di una ellisse di centro (0,0), compresa nel rettangolo

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}\le X\le\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{2}\le Y\le\frac{1}{2},$$

e gli assi di simmetria sono le rette di coefficiente angolare

$$m_1=-2+\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad m_2=-2-\sqrt{5}.$$

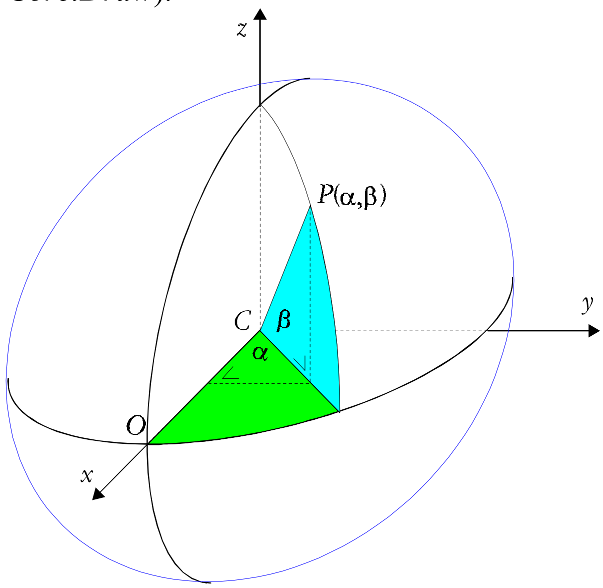
La rappresentazione in assonometria cavaliera della circonferenza $\gamma$ è dunque la seguente:




Come si vede, non è affatto banale rappresentare la circonferenza $\gamma$ sul piano del foglio. Il grafico è stato ottenuto con MAPLE. In modo analogo possiamo ottenere il contorno apparente della sfera di centro $O$ e raggio 1, che è la circonferenza massima della sfera che sta sul piano ortogonale alla direzione di proiezione; la rappresentazione sul quadro è l'ellisse di equazione

$$5X^2-2XY+5Y^2=6.$$

La figura seguente rappresenta una sfera sulla quale sia stato fissato come sistema di riferimento una coppia di cerchi massimi ortogonali, e un punto $P(\alpha,\beta)$ dove $\alpha$ è la longitudine e $\beta$ è la latitudine (il disegno, riportando i dati delle ellissi, è stato eseguito con il programma di grafica *CorelDraw*).




prof. Michele Impedovo