MATRICI E ISOMETRIE NELLO SPAZIO:
un utilizzo didattico di MAPLE

prof. Michele Impedovo

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21 B, n° 1, febbraio 1998

1. Introduzione
L'insegnamento della geometria dello spazio tridimensionale è stato negli ultimi decenni a torto trascurato nelle scuole medie superiori, nonostante i temi di matematica della maturità scientifica abbiano più volte presentato quesiti sull'argomento.
L'approccio alla geometria dello spazio in forma assiomatica, quindi con metodo sintetico, può risultare oggettivamente faticoso: per esempio molti problemi legati al parallelismo e alla perpendicolarità tra rette e piani non sono di semplice risoluzione in una teoria rigorosamente ipotetico-deduttiva.
In un contesto algebrico, invece, laddove si intenda per *punto* una terna ordinata (x,y,z) di numeri reali, e per *vettore* $[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]$ la *relazione di posizione* del punto (x_2,y_2,z_2) rispetto al punto (x_1,y_1,z_1), lo studio delle proprietà lineari dello spazio tridimensionale risulta naturale e relativamente semplice; non occorre un complesso e articolato impianto assiomatico, occorre semplicemente sfruttare la struttura di *spazio vettoriale* di R^3, una struttura algebrica in cui sono definite (con le note proprietà) le operazioni di
1) **addizione di due vettori**:
$$[a_1,b_1,c_1]+[a_2,b_2,c_2] = [a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2].$$
2) **moltiplicazione di un vettore per un numero reale**:
$$h[a,b,c] = [ha,hb,hc].$$
3) **prodotto scalare di due vettori**:
$$[a_1,b_1,c_1]\cdot[a_2,b_2,c_2] = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2.$$

I concetti di vettore e di spazio vettoriale sono molto importanti per la matematica, nonostante vengano spesso introdotti (e solo parzialmente) in fisica; ormai in qualunque corso di laurea scientifico compaiono elementi di algebra lineare, e ritengo che lo spazio tridimensionale sia un buon modello (dal punto di vista didattico e dal punto di vista culturale) per comprendere alcuni concetti forti dell'algebra lineare: sottospazi, basi, dipendenza e indipendenza lineare. I programmi Brocca ne prevedono la trattazione nei trienni degli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.
La padronanza di tali concetti consente di trattare agevolmente (dal punto di vista algebrico) il tema delle isometrie nello spazio, generalizzando e completando così la conoscenza delle isometrie piane. Viceversa lo studio delle isometrie nello spazio consente di applicare in un contesto significativo le più importanti nozioni di algebra lineare.
Per i calcoli relativi alle matrici e ai prodotti di matrici è stato utilizzato il potente software di calcolo simbolico MAPLE (*MapleV*, della Università di Waterloo, Canada). Con opportuni accorgimenti (e con maggior fatica), le stesse funzioni sono implementabili con DERIVE.
Per una trattazione relativamente semplice e snella della geometria lineare dello spazio, svolta mediante gli strumenti vettoriali, si consulti per esempio l'articolo *Geometria e algebra lineare* all'interno del Quaderno Aggiornamento PRISTEM del novembre 1994:
Per un insegnamento della geometria. Corso di aggiornamento per insegnanti di matematica della scuola secondaria superiore. Geometria e algebra lineare.

2. Richiami sulle isometrie nel piano
Si può dire ormai che il tema delle trasformazioni geometriche del piano sia largamente consolidato nell'insegnamento secondario, almeno dal punto di vista sintetico.
L'orientamento generale sembra quello di introdurre le trasformazioni dal punto di vista sintetico, e solo successivamente di trattarle dal punto di vista algebrico, identificando la trasformazione con una coppia di equazioni.
Daremo dunque per note le proprietà fondamentali delle isometrie nel piano. Vogliamo qui richiamare alcune ben note nozioni che riguardano le isometrie piane dal punto di vista algebrico, per poi passare alle isometrie nello spazio tridimensionale.
Consideriamo la generica trasformazione lineare caratterizzata dalle equazioni
$$\begin{cases} x' = a_1x+b_1y+c_1 \\ y' = a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$$
che mutano il generico punto $P(x,y)$ del piano nel punto $P'(x',y')$:
$$(x,y) \mapsto (a_1x+b_1y+c_1,\ a_2x+b_2y+c_2).$$
Essa è una trasformazione geometrica (cioè una applicazione biunivoca) se e solo se il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

è diverso da 0. Infatti in questo caso, e solo in questo caso, il sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=x'-c_1 \\ a_2x+b_2y=y'-c_2 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione.
Le equazioni

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1 \\ y'=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$$

si possono esprimere nella più compatta forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

cioè

$$\mathbf{x'} = \mathbf{M}\,\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Come è noto, le **isometrie** sono rappresentate da equazioni dei seguenti tipi:

Isometrie dirette: $\begin{cases} x'=ax-by+c_1 \\ y'=bx+ay+c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$

Isometrie opposte: $\begin{cases} x'=ax+by+c_1 \\ y'=bx-ay+c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$

con $a^2+b^2=1$. Nelle isometrie dirette la matrice **M** ha determinante 1 e rappresenta una **rotazione** intorno all'origine, nelle isometrie opposte la matrice **M** ha determinante -1 e rappresenta una **riflessione** rispetto ad una retta per l'origine.
Osserviamo che possiamo riassumere tali equazioni <u>utilizzando una sola matrice</u> 3×3; esse sono infatti equivalenti alle seguenti:

Isometrie dirette: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & c_1 \\ b & a & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Isometrie opposte: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c_1 \\ b & -a & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

con $a^2+b^2=1$.
L'ultima riga della matrice della trasformazione è sempre costituita dal vettore [0,0,1], e l'ultima colonna rappresenta la traslazione associata all'isometria. Un punto generico del piano viene così indicato con un vettore a 3 componenti, con la terza componente sempre uguale a 1.
L'insieme M_{iso2} di tali matrici costituisce un gruppo <u>non</u> <u>commutativo</u> rispetto al prodotto (righe per colonne) di matrici. Il gruppo M_{iso2} è isomorfo al gruppo delle isometrie piane rispetto alla composizione di applicazioni.

3. Isometrie nello spazio

Nello spazio mutano in modo significativo i concetti di isometria *diretta* e *opposta*: per esempio la simmetria centrale, che nel piano è una isometria diretta, nello spazio è una isometria opposta; la riflessione rispetto ad una retta, che nel piano è una isometria opposta, nello spazio è una isometria diretta.
La generica trasformazione lineare che muta il punto $P(x,y,z)$ dello spazio nel punto $P'(x',y',z')$ è caratterizzata dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1z+d_1 \\ y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2 \\ z'=a_3x+b_3y+c_3z+d_3 \end{cases}$$

che si possono esprimere nella forma più compatta:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

cioè, come nel piano, **x'** = **M x** + **t**.
Analogamente a quanto accade nel piano, tale trasformazione è una applicazione biunivoca se e solo se det(**M**)≠0.
Il vettore **t**=[d_1,d_2,d_3] rappresenta la traslazione associata alla trasformazione. A meno della traslazione **t** una trasformazione lineare dello spazio è dunque caratterizzata dalla matrice **M**, che lascia fissa l'origine.

Vogliamo ora caratterizzare, tra tutte le matrici, quelle che rappresentano una isometria.
Osserviamo in che modo la matrice **M** muta i punti (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1):

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Quindi le colonne di **M** sono i vettori trasformati dei versori fondamentali degli assi x, y, z **i**=[1,0,0], **j**=[0,1,0], **k**=[0,0,1]:

$$\mathbf{i} \mapsto [a_1, a_2, a_3] \quad \mathbf{j} \mapsto [b_1, b_2, b_3] \quad \mathbf{k} \mapsto [c_1, c_2, c_3].$$

Questa osservazione ci permetterà di caratterizzare facilmente le isometrie.

ESEMPIO. La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

lascia fissi **i** e **j**, e muta **k** in -**k**: rappresenta dunque la riflessione rispetto al piano *xy*. Infatti un qualunque punto $P(x,y,z)$ viene mutato in $P'(x',y',-z')$.

Sappiamo che la *norma* (o *modulo*) di un vettore **v**=[a,b,c] è il numero reale

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Affinché **M** rappresenti un'isometria, cioè conservi le lunghezze, deve risultare

$$\mathbf{i'}\cdot\mathbf{i'} = \mathbf{j'}\cdot\mathbf{j'} = \mathbf{k'}\cdot\mathbf{k'} = 1.$$

Inoltre, poiché un'isometria conserva gli angoli, e poiché **i**, **j**, **k** sono a due a due ortogonali, devono essere a due a due ortogonali anche **i'**, **j'**, **k'**, cioè deve risultare

$$\mathbf{i'}\cdot\mathbf{j'} = \mathbf{j'}\cdot\mathbf{k'} = \mathbf{k'}\cdot\mathbf{i'} = 0.$$

In sintesi: indichiamo con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i tre vettori colonna di una matrice **M**; **M** rappresenta una isometria se e solo se risulta

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Una matrice che soddisfi tale condizione è detta *ortogonale*. L'insieme delle matrici ortogonali è un gruppo non commutativo (rispetto al prodotto di matrici). Tale gruppo è isomorfo al gruppo delle isometrie dello spazio (rispetto alla composizione di applicazioni) che lasciano fissa l'origine.

ESEMPIO. La matrice **M**:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale: i vettori colonna

$$\mathbf{i'} = \left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \quad \mathbf{j'} = \left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right], \quad \mathbf{k'} = \left[-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$$

soddisfano infatti la condizione di ortogonalità (verificare). **M** rappresenta dunque una isometria che lascia fissa l'origine.

Si dimostra che una matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 oppure a –1: chiameremo rispettivamente *dirette* e *opposte* le relative isometrie.

La simmetria di centro *O*. La simmetria centrale rispetto all'origine muta il punto (x,y,z) nel punto ($-x$,$-y$,$-z$), quindi è caratterizzata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

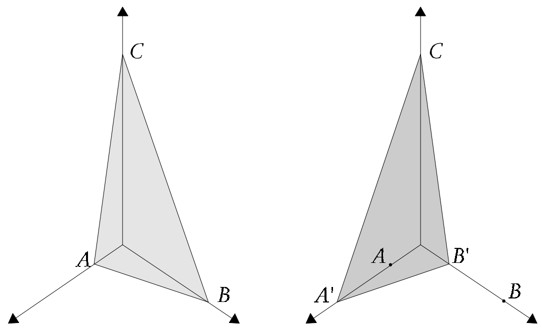
Il determinante di tale matrice è -1: si tratta dunque di una isometria opposta, che muta l'orientamento nello spazio, cioè muta una terna destrorsa in una terna sinistrorsa. Nel piano se una figura F viene mutata in una figura F' mediante un'isometria opposta (per esempio una riflessione) allora non è possibile *sovrapporre F* e *F'* se non *ribaltando* una delle due; è necessario cioè *uscire* dal piano, e sfruttare la terza dimensione.
Nello spazio non esiste una possibilità analoga: in generale se una figura F si muta in una figura F' mediante una isometria opposta, allora F e F', nonostante siano isometriche, non sono *sovrapponibili*: non è possibile sfruttare una quarta dimensione per *ribaltare* una delle due. Per esempio, la piramide P di vertici

$$O(0,0,0),\ A(1,0,0),\ B(0,2,0),\ C(0,0,3),$$

mediante la simmetria di centro O si muta nella piramide P' di vertici

$$O(0,0,0),\ A'(-1,0,0),\ B'(0,-2,0),\ C'(0,0,-3).$$

Cerchiamo di *manovrare* nello spazio P' tentando di fare in modo che i suoi vertici coincidano con i vertici di P: possiamo fare in modo che lo spigolo OC' coincida con lo spigolo OC, e che gli spigoli OA' e OB' giacciano sugli assi x e y.

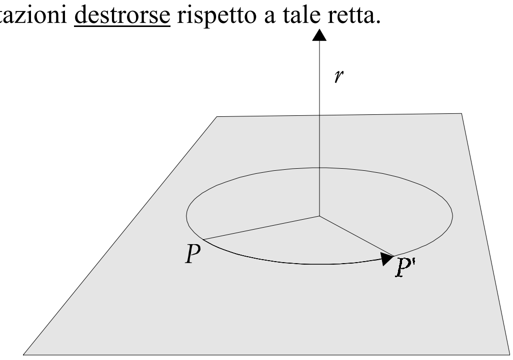


Ma non possiamo far coincidere A con A' e B con B'.

Rotazione intorno all'asse z. Risulta molto semplice descrivere la rotazione di angolo α intorno all'asse z: infatti essa coincide con la rotazione intorno all'origine O nel piano xy. La matrice di tale rotazione è quindi la seguente:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

È necessaria tuttavia una precisazione. Nel piano il verso di rotazione intorno ad O è stabilito dal segno di α (antiorario se $\alpha>0$); nello spazio occorre stabilire il *verso dell'asse di rotazione*: l'asse di rotazione deve essere una *retta orientata*. Si considerano allora positive le rotazioni <u>destrorse</u> rispetto a tale retta.



Per esempio, nel piano xy una rotazione di $+\pi/2$ intorno all'asse z (orientato secondo il vettore **k**) muta il versore **i** nel versore **j**, il versore **j** nel versore **-i**, e lascia fisso il versore **k**, quindi la matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mentre una rotazione di $-\pi/2$ muta **i** in **-j**, e **j** in **i**, e la matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno a una retta per l'origine. Ora dobbiamo compiere un passo decisivo, determinando la matrice di una rotazione di angolo α intorno a una retta r per l'origine O.
Supponiamo che la retta r sia descritta mediante un *vettore direzione* di r, $\mathbf{v}=[a,b,c]$; in questo modo è automaticamente definito anche l'orientamento della retta r; determiniamo il versore **u** *normalizzando* **v**, cioè

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right].$$

L'idea chiave è la seguente: poiché sappiamo determinare la matrice della rotazione ρ di angolo α intorno all'asse z, applichiamo un'isometria f che muti il versore **u** nel versore **k** dell'asse z, poi eseguiamo la rotazione ρ intorno all'asse z (che conosciamo), e infine applichiamo l'isometria f^{-1} inversa della f. L'isometria

$$f^{-1} \circ \rho \circ f$$

è la rotazione di angolo (orientato) α intorno alla retta (orientata) r.
Noi determineremo la matrice di f^{-1}. La matrice di f sarà naturalmente la matrice inversa.
Sia dato quindi il vettore **v**, vettore direzione di r, e sia **u** il versore normalizzato di **u**.
Dobbiamo determinare una coppia di versori **p** e **q** tali che la matrice che ha per colonne **p**, **q**, **u** sia ortogonale. Tale matrice, come abbiamo visto, rappresenta l'isometria che muta **i**, **j**, **k** in **p**, **q**, **u**, e cioè l'isometria f^{-1} cercata:

$$\mathbf{i} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{j} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{k} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbf{u}.$$

La difficoltà consiste dunque nel determinare **p** e **q**.
Determiniamo innanzitutto un vettore qualsiasi ortogonale a **u**. Supponiamo che **u** non coincida con **i**, **j**, **k** (nel qual caso un vettore ortogonale si trova immediatamente). In generale, un vettore ortogonale al vettore $[x,y,z]$ è per esempio il vettore

$$[yz,xz,-2xy];$$

infatti il prodotto scalare è nullo:

$$[x,y,z] \cdot [yz,xz,-2xy] = xyz+xyz-2xyz = 0.$$

Normalizzando tale vettore otteniamo un versore **p** ortogonale a **u**. L'ultimo passo: il vettore **q** si può determinare mediante l'operazione di *prodotto vettoriale* tra **u** e **p**:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}.$$

Infatti il prodotto vettoriale di due versori tra loro ortogonali è un versore ortogonale ad entrambi, diretto in modo tale che **p**, **q**, **u** sia una terna destrorsa.
In definitiva, a partire dal vettore **v**, abbiamo costruito una *base ortonormale*

$$\{ \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u} \},$$

cioè una terna destrorsa di vettori di modulo 1, a due a due ortogonali.

La matrice **A** che ha come colonne i vettori **p**, **q**, **u** è la matrice di f^{-1}. La matrice inversa di **A** (e poiché **A** è ortogonale, l'inversa di **A** coincide con la trasposta $\mathbf{A}^T$ di **A**) rappresenta f.
Indicata con **M** la matrice della rotazione di angolo α intorno all'asse z, cioè

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice della rotazione di angolo α intorno alla retta di vettore direzione **u** si ottiene dunque dal prodotto

$$\mathbf{A}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}^T.$$

ESEMPIO. Determinare la matrice della rotazione di $\pi/2$ intorno al vettore $\mathbf{v}=[1,2,2]$. Innanzitutto normalizziamo **v**, dividendo per $\|\mathbf{v}\|=3$:

$$\mathbf{u} = [1/3,2/3,2/3].$$

Poi determiniamo **p** con l'algortimo esposto, e normalizziamo:

$$\mathbf{p} = [2/3,1/3,-2/3].$$

Infine calcoliamo il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$:

$$\mathbf{q} = [-2/3, 2/3, -1/3].$$

Allora la matrice **A** è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

e la matrice $\mathbf{A}^T$ è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

La matrice **M** della rotazione ρ di angolo π/2 intorno all'asse z è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque la matrice **R** della rotazione di angolo π/2 intorno alla retta di vettore direzione [1,2,2] è data dal prodotto

$$\mathbf{R} = \mathbf{A\,M\,A}^T = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che **R** è la matrice cercata: ogni punto della retta r di vettore direzione $\mathbf{v}$=[1,2,2] è fisso. La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

cioè il generico punto di r ha coordinate $(t,2t,2t)$. Questo significa che se moltiplichiamo la matrice **R** per il vettore $t\mathbf{v}=[t,2t,2t]$ dobbiamo ottenere ancora il vettore $t\mathbf{v}$. Infatti risulta

$$\begin{bmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Riflessione rispetto ad un piano per l'origine. Il metodo è del tutto analogo.
Supponiamo che il piano α sia caratterizzato da un suo *vettore normale* **v**: come è noto, dato un vettore $\mathbf{v}=\underline{OA}$ il luogo dei punti P dello spazio tali che $\underline{OP}$ è ortogonale a $\underline{OA}$ è un piano per O. ome prima, costruiamo a partire dal vettore **v** una base ortonormale

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}\}$$

e la matrice **A** che ha tali vettori come vettori colonna: **A**=[**p q u**]
A è la matrice dell'isometria f^{-1} che muta i versori della base canonica {**i**,**j**,**k**} nei versori {**p**,**q**,**u**}. L'inversa (e quindi la trasposta) $\mathbf{A}^T$ di **A** è la matrice dell'isometria f che muta i versori della base {**p**, **q**, **u**} nei versori della base canonica {**i**, **j**, **k**}.
Sia ora **M** la matrice della riflessione rispetto al piano xy:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La riflessione rispetto al piano di vettore normale **v** si ottiene dalla composizione

$$f^{-1}\circ\sigma\circ f.$$

Quindi la matrice cercata si ottiene dal prodotto:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}^T.$$

Poiché la terna {**p**,**q**,**u**} è destrorsa, det(**A**)=det($\mathbf{A}^T$)=1; poiché det(**M**)=–1, la matrice di una riflessione ha sempre determinante –1, cioè è una isometria opposta.

ESEMPIO. Determinare la matrice **r** della riflessione rispetto al piano di vettore normale v=[1,1,0].
Risulta **u**=[$1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$,0]. Un versore ortogonale a **v** è k=[0,0,1], e

$$\mathbf{u}\times k = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice cercata è

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \equiv$$

Anche per questo esempio possiamo effettuare una verifica. Sappiamo che qualunque punto del piano di riflessione è fisso. Poiché il piano α è il luogo dei punti $P(x,y,z)$ tali che <u>*OP*</u> è ortogonale a **v**=[1,1,0], deve risultare

$$[x,y,z]\cdot[1,1,0] = 0$$
$$x+y = 0.$$

Come è noto il piano α è caratterizzato dall'*equazione generale* $x+y=0$, cioè è il luogo dei punti che hanno ascissa e ordinata opposta: un generico punto di α è $P(t,-t,z)$. Risulta

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ z \end{bmatrix},$$

come ci aspettavamo.

4. Dalle isometrie alle matrici

Abbiamo ora tutti gli strumenti per determinare la matrice di una qualunque isometria nello spazio. Analogamente a quanto svolto nel piano, osserviamo che le equazioni

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{cases}$$

possono essere rappresentate in forma più compatta da <u>una sola matrice 4×4</u> nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale; l'ultima riga della matrice della trasformazione è sempre costituita dal vettore [0,0,0,1], e l'ultima colonna è costituita dal vettore

$$[d_1,d_2,d_3,1],$$

dove $[d_1,d_2,d_3]$ è il vettore della traslazione associata.
Un punto generico dello spazio viene indicato con un vettore a 4 componenti, con la quarta componente sempre uguale a 1.

L'insieme di tali matrici è un gruppo (non abeliano) isomorfo al gruppo M_{iso3} delle isometrie dello spazio. Nel seguito confonderemo matrici e corrispondenti isometrie.

Vediamo ora alcuni tipi di isometrie molto importanti, perché mediante esse sarà possibile generare ogni isometria.

Simmetrie centrali e traslazioni. La matrice di una traslazione di vettore $[d_1,d_2,d_3]$ è naturalmente la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La simmetria centrale di centro $C(x_0,y_0,z_0)$, in modo analogo a quanto accade nel piano, si ottiene, con il metodo della *doppia traslazione*, dalla composizione della traslazione T_{CO} di vettore $[-x_0,-y_0,-z_0]$ composta con la simmetria centrale S rispetto all'origine, composta con la traslazione T_{OC} di vettore $[x_0,y_0,z_0]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2x_0 \\ 0 & -1 & 0 & 2y_0 \\ 0 & 0 & -1 & 2z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quindi si ottiene dalla composizione della simmetria centrale rispetto all'origine O con la traslazione di vettore $[2x_0,2y_0,2z_0]$.
Come accade nel piano, la composizione di due simmetrie centrali di centri $A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$ è una traslazione di vettore $2\underline{AB}=[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & -1 & 0 & 2y_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2y_1 \\ 0 & 0 & -1 & 2z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2(x_2-x_1) \\ 0 & 1 & 0 & 2(y_2-y_1) \\ 0 & 0 & 1 & 2(z_2-z_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A differenza di quanto accade nel piano però, la simmetria centrale è una isometria opposta (il determinante è –1).

Rotazioni. Abbiamo già visto come caratterizzare le rotazioni intorno ad una retta per l'origine. Per determinare la matrice di una rotazione rispetto ad un asse qualsiasi useremo il solito metodo della doppia traslazione.
Le rotazioni intorno ad una retta r qualsiasi, data mediante un punto $P(x_0,y_0,z_0)\in r$ e un vettore direzione $\mathbf{v}=[a,b,c]$ si ottengono come composizione della traslazione T di vettore

$$-\underline{OP}=[-x_0,-y_0,-z_0],$$

della rotazione intorno alla retta parallela a r passante per O, e della traslazione –T di vettore

$$\underline{OP}=[x_0,y_0,z_0].$$

Quindi una rotazione ρ generica nello spazio è funzione di <u>sette</u> parametri: l'ampiezza αdell'angolo di rotazione, le tre componenti del vettore **v**, le tre coordinate di P.

$$\rho = \rho(\alpha,a,b,c,x_0,y_0,z_0).$$

ESEMPIO. Determinare la matrice della rotazione di $\pi/2$ intorno alla retta r passante per $P(1,1,0)$ parallela all'asse z.
La traslazione di vettore $[-1,-1,0]$, data dalla matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

muta la retta r nell'asse z. La rotazione di π intorno all'asse z è data dalla matrice

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice richiesta è data dal prodotto

$$-\mathbf{T}\,\mathbf{R}\,\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&2\\0&-1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Come si vede, la rotazione richiesta si ottiene dalla composizione della rotazione di π intorno all'asse z con la traslazione di vettore [2,2,0]. ≡

Riflessioni. Sempre con il metodo della doppia traslazione possiamo determinare la matrice di una riflessione σ rispetto ad un piano qualsiasi, passante per il punto $P(x_0,y_0,z_0)$ e avente vettore normale **v**=[a,b,c]; indicate con T la traslazione di vettore $-\underline{OP}$, e con S la riflessione rispetto al piano per l'origine di vettore normale **v** si ottiene

$$\sigma = -\mathrm{T}\circ\mathrm{S}\circ\mathrm{T}$$

ESEMPIO. Determinare la matrice della riflessione rispetto al piano per P(1,1,0) di vettore normale v=[1,1,1].
La matrice richiesta si ottiene dal prodotto

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3&-2/3&-2/3&0\\-2/3&1/3&-2/3&0\\-2/3&-2/3&1/3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3&-2/3&-2/3&4/3\\-2/3&1/3&-2/3&4/3\\-2/3&-2/3&1/3&4/3\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\ \equiv$$

La composizione di due riflessioni rispetto a piani paralleli è una traslazione (il cui vettore ha modulo pari al doppio della distanza tra i due piani, e la cui direzione è ortogonale ai due piani). La composizione di due riflessioni rispetto a piani incidenti è una rotazione intorno alla retta intersezione dei due piani.

ESEMPIO. Consideriamo i due piani paralleli di vettore normale [1,2,2], il primo passante per A(1,1,0) e il secondo per B(1,1,1). Le due matrici sono rispettivamente

$$\begin{bmatrix}\frac{7}{9}&\frac{-4}{9}&\frac{-4}{9}&\frac{2}{3}\\\frac{-4}{9}&\frac{1}{9}&\frac{-8}{9}&\frac{4}{3}\\\frac{-4}{9}&\frac{-8}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{3}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad\qquad\begin{bmatrix}\frac{7}{9}&\frac{-4}{9}&\frac{-4}{9}&\frac{10}{9}\\\frac{-4}{9}&\frac{1}{9}&\frac{-8}{9}&\frac{20}{9}\\\frac{-4}{9}&\frac{-8}{9}&\frac{1}{9}&\frac{20}{9}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Come si può notare esse hanno la stessa sottomatrice ortogonale, e differente traslazione associata. Il loro prodotto (la seconda per la prima) dà la matrice di una traslazione:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{4}{9}\\0&1&0&\frac{8}{9}\\0&0&1&\frac{8}{9}\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che il vettore [4/9,8/9,8/9] è ortogonale ai due piani (infatti è parallelo al loro vettore normale). Si può dimostrare per esercizio che il vettore [4/9,8/9,8/9] ha per modulo il doppio della distanza tra i due piani. ≡

ESEMPIO. Consideriamo il piano α per A(1,–1,0) di vettore normale [1,–2,–2] e il piano β per B(0,2,1) di vettore normale [2,-2,1]. Le matrici corrispondenti sono le seguenti:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-4}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il loro prodotto (la seconda per la prima) dà la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{44}{81} & \frac{-64}{81} & \frac{-50}{27} \\ \frac{76}{81} & \frac{1}{81} & \frac{28}{81} & \frac{32}{27} \\ \frac{16}{81} & \frac{-68}{81} & \frac{-41}{81} & \frac{-70}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo svolgere una semplice verifica, dimostrando che la retta r intersezione dei due piani rimane fissa. Ricordiamo che il piano per $A(x_0,y_0,z_0)$ di vettore normale $\mathbf{v}=[a,b,c]$ è il luogo dei punti $P(x,y,z)$ tali che $\underline{AP}$ sia ortogonale a $\mathbf{v}$:

$$\underline{AP} \cdot \mathbf{v} = [x-x_0, y-y_0, z-z_0] \cdot [a,b,c] = 0,$$

da cui ricaviamo l'equazione generale del piano:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

Quindi il piano α ha equazione

$$x-2y-2z = 3$$

e il piano β ha equazione

$$2x-2y+z = -3.$$

Dal sistema delle due equazioni si ottengono le equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = -6-3t \\ y = -\frac{9}{2}-\frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Il generico punto della retta r è dunque

$$P\left(-6-3t, -\frac{9}{2}-\frac{5}{2}t, t\right),$$

ed esso è fisso rispetto alla composizione delle due riflessioni. Infatti risulta

$$\begin{bmatrix} 23/81 & 44/81 & -64/81 & -50/81 \\ 76/81 & 1/81 & 28/81 & 32/81 \\ 16/81 & -68/81 & -41/81 & -70/81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6-3t \\ -\frac{9}{2}-\frac{5}{2}t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-3t \\ -\frac{9}{2}-\frac{5}{2}t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}. \equiv$$

5. Classificazione delle isometrie nello spazio

Ricordiamo innanzitutto un notevole teorema, la cui generalizzazione a spazi di dimensione n è nota come *Teorema di Cartan-Dieudonné*, del tutto analogo al corrispondente teorema del piano.

Teorema. Ogni isometria dello spazio è la composizione di al più 4 riflessioni. Se l'isometria ha un punto fisso allora si ottiene con al più 3 riflessioni.

Nel piano ogni isometria diretta è una traslazione oppure una rotazione (intorno ad un punto), e ogni isometria opposta è una riflessione (intorno a una retta) oppure una glissoriflessione.

Anche nello spazio è possibile classificare in modo semplice le isometrie.

Supponiamo che **M** sia la matrice di una isometria. La struttura di **M** è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{T} \\ \\ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale, e T è la traslazione associata all'isometria.

Concentriamo la nostra attenzione su **A**. Essa ha almeno un punto fisso, l'origine *O*, e per il teorema precedente si ottiene dalla composizione di al più tre riflessioni. Poiché è una matrice ortogonale, il suo determinante è 1 o –1.

Se det(**A**)=1 e **A** non è l'identità, allora **A** rappresenta un'isometria diretta, quindi si ottiene dalla composizione di due riflessioni (tre riflessioni darebbero una isometria opposta) rispetto a due piani incidenti (passano per *O*). Il prodotto di due riflessioni rispetto a due piani incidenti è una rotazione rispetto alla retta intersezione dei due piani.

Concludendo:

Ogni isometria diretta è la composizione di una rotazione (eventualmente di angolo nullo, cioè l'identità) e di una traslazione (eventualmente di vettore nullo, cioè l'identità).

Se det(**A**)=–1, allora **A** rappresenta un'isometria opposta, quindi o è una riflessione oppure è il prodotto di tre riflessioni rispetto a piani passanti per *O*. Se moltiplichiamo **A** per la matrice della simmetria centrale **S** rispetto a *O*, otteniamo una isometria diretta che ha *O* come punto fisso, e quindi, per quanto detto prima è una rotazione **R**:

$$\mathbf{A\,S} = \mathbf{R}.$$

Ne consegue

$$\mathbf{A} = \mathbf{A\,S\,S} = \mathbf{R\,S}$$

cioè l'isometria **A** si ottiene dal prodotto di una rotazione intorno a una retta per *O* per la simmetria centrale di centro *O*.

Concludendo:

Ogni isometria opposta è la composizione di una rotazione, di una simmetria centrale e di una traslazione (eventualmente di vettore nullo).

6. Utilizzo del software MAPLEV3 per le isometrie nello spazio

MAPLE è un software molto potente di calcolo simbolico, uno dei *CAS* (*computer algebra system*) più potenti (MAPLE E MATHEMATICA sono forse i CAS maggiormente utilizzati per la ricerca). Come con DERIVE è possibile registrare una sessione di lavoro in cui siano state definite dall'utente delle funzioni. Il lavoro svolto è consistito nell'implementare le funzioni relative alle singole isometrie, in modo che per ogni isometria MAPLE calcola la matrice associata.

Innanzitutto viene caricato in memoria, con il comando

```
with(linalg);
```

il pacchetto di algebra lineare, che consente di definire matrici e vettori e di calcolarne i prodotti. Le traslazioni e le simmetrie centrali sono facilmente definibili:

```
tra:=(tx,ty,tz)->matrix([[1,0,0,tx],[0,1,0,ty],[0,0,1,tz],[0,0,0,1]]):
simC:=(x0,y0,z0)->matrix([[-1,0,0,2*x0],[0,-1,0,2*y0],[0,0,-1,2*z0],[0,0,0,1]]):
```

La sintassi è semplice: **tra** è il nome di una funzione, che associa (mediante la freccia "->") alla terna (tx,ty,tz) la relativa matrice, i cui elementi vengono dati per righe.

Per esempio, il comando

```
simC(1,-2,3);
```

dà in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definiamo la procedura *ortogonale*, che ci permette di costruire un vettore ortogonale ad un vettore dato.

```
ortogonale:=proc(a,b,c);
if [a,b,c]=[a,0,0] then vector([0,1,0])
elif [a,b,c]=[0,b,0] then vector([0,0,1])
elif [a,b,c]=[0,0,c] then vector([1,0,0])
else vector([b*c,a*c,-2*a*b]):fi:end:
```

Per esempio il comando

ortogonale(1,-2,3);
dà in uscita il vettore

$$[-6\ \ 3\ \ 4].$$

Definiamo ora la funzione *base*, che determina, in funzione del vettore **v**=[a,b,c], la matrice **A** le cui colonne sono i tre vettori della base ortonormale [**p**,**q**,**u**], con **u** parallelo a **v**.
I comandi **stack** e **augment** uniscono, rispettivamente per righe e per colonne, due matrici (o una matrice e un vettore, come nel nostro caso): sono utilizzate per passare dalla sottomatrice 3×3 alla matrice 4×4 $\mathbf{M}\in M_{iso3}$. Il comando **normalize** normalizza un vettore, cioè lo divide per il suo modulo, in modo che risulti di modulo unitario. Il comando **crossprod** calcola il prodotto vettoriale di due vettori.

```
base:=(a,b,c)->stack(augment(normalize(ortogonale(a,b,c)),
crossprod(normalize([a,b,c]),normalize(ortogonale(a,b,c))),
normalize([rx,ry,rz]),
[0,0,0]),[0,0,0,1]):
```

Per esempio, il comando

```
base(1,2,2);
```

dà in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in cui la terza colonna è il vettore normalizzato

$$\mathbf{u} = [1/3, 2/3, -2/3]$$

del vettore **v**=[1,2,2], e le altre due colonne completano una base ortonormale.

Ora dobbiamo definire la rotazione di angolo α intorno all'asse z (la funzione **rotz**) e la riflessione rispetto al piano xy (la funzione **rifxy**). Utilizzeremo tali funzioni per definire rotazioni e riflessioni generiche.

```
rotz:=(a)->matrix([[cos(a),-sin(a),0,0],[sin(a),cos(a),0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]):
rifxy:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,1]]):
```

Siamo ora in grado di definire (con la funzione **rotr**) la matrice della rotazione di angolo α intorno alla retta per l'origine di vettore direzione [a,b,c]. Il comando **inverse** calcola l'inversa di una matrice; il comando **evalm** valuta il risultato del prodotto di matrici, indicato con il simbolo **&***.

```
rotr:=(alpha,a,b,c)->evalm(base(a,b,c)&*rotz(alpha)&*inverse(base(a,b,c))):
```

Per esempio il comando

```
rotr(Pi/2,1,3,2);
```

dà in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7}\sqrt{14}+\frac{3}{14} & \frac{3}{14}\sqrt{14}+\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7}\sqrt{14}+\frac{3}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{1}{14}\sqrt{14}+\frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{3}{14}\sqrt{14}+\frac{1}{7} & \frac{1}{14}\sqrt{14}+\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come si vede, i calcoli sono scoraggianti. Un programma di calcolo simbolico li svolge senza perdite di tempo, lasciando al matematico (allo studente) il compito di *progettare*, anziché di *calcolare*.

ESEMPIO. Determinare la matrice della rotazione ρ di π/4 intorno alla retta per l'origine di vettore v=[1,1,1].
Il comando

```
M:=rotr(Pi/4,1,1,1);
```

assegna alla variabile M la matrice

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo verificare tale risultato: il generico punto dell'asse di rotazione ha coordinate

(t,t,t);

il comando

evalm(M&*[t,t,t,1]);

dà in uscita il vettore

$$[t \quad t \quad t \quad 1] ,$$

come ci aspettavamo.

Inoltre il comando

evalm(M^8);

dà in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè l'identità: elevare **M** alla potenza ottava significa determinare la matrice della rotazione ρ applicata otto volte, cioè la rotazione di 2π. ≡

Dobbiamo ora definire la matrice della riflessione rispetto ad un piano per O di vettore normale **v**=[a,b,c].

rifp:=(a,b,c)->evalm(base(a,b,c)&*rifxy&*inverse(base(a,b,c))):

Per esempio il comando

rifp(1,1,1);

fornisce in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO. Determinare la matrice della riflessione σ rispetto al piano α passante per O, $A(1,0,2)$, $B(0,2,1)$.

Un vettore normale **v**=[a,b,c] del piano α deve essere ortogonale sia a <u>OA</u> che a <u>OB</u>:

v = <u>OA</u> × <u>OB</u> = [1,0,2] × [0,2,1] = [-4,-1,2]

Il comando

rifp(-4,-1,2);

dà in uscita la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{-11}{21} & \frac{-8}{21} & \frac{16}{21} & 0 \\ \frac{-8}{21} & \frac{19}{21} & \frac{4}{21} & 0 \\ \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{13}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .\ ≡$$

La rotazione di angolo α intorno alla retta di vettore direzione **v**=[a,b,c] passante per il punto $P(x_0,y_0,z_0)$, indicata con la funzione **rotrP**, esige in ingresso sette parametri:

rotrP:=(alpha,a,b,c,x0,y0,z0)->

evalm(tra(x0,y0,z0)&*rotr(alpha,a,b,c)&*tra(-x0,-y0,-z0)):

ESEMPIO. Il comando

M:=rotrP(Pi/2,0,3,4,1,1,1);

assegna alla variabile **M** la seguente matrice:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{-16}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che rappresenta la rotazione di $\pi/2$ intorno alla retta passante per $P(1,1,1)$ di vettore direzione **v**=[0,3,4], il cui punto generico ha perciò coordinate

$$P(1,1+3t,1+4t).$$

Verifichiamo che il generico punto di r è fisso; il comando

evalm(M&*[1,1+3*t,1+4*t,1]);

dà infatti in uscita il vettore

$$[1 \quad 1+3t \quad 1+4t \quad 1].$$

In modo analogo definiamo la riflessione rispetto al piano di vettore normale **v**=$[a,b,c]$ passante per il punto $P(x_0,y_0,z_0)$, indicata con **rifpC**.

rifpC:=(a,b,c,x0,y0,z0)->

evalm(tra(x0,y0,z0)&*rifp(a,b,c)&*tra(-x0,-y0,-z0)):

ESEMPIO. Determinare la matrice della riflessione rispetto al piano α di equazione

$$x+2y-4z=3.$$

Si tratta del piano di vettore normale **v**=[1,2,–4] e passante (per esempio) per $P(1,1,0)$.

Il comando

M:=rifpC(1,2,-4,1,1,0);

assegna alla variabile **M** la seguente matrice:

$$M := \begin{bmatrix} \frac{19}{21} & \frac{-4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{-4}{21} & \frac{13}{21} & \frac{16}{21} & \frac{4}{7} \\ \frac{8}{21} & \frac{16}{21} & \frac{-11}{21} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgiamo qualche semplice verifica.

La matrice dovrebbe essere la stessaqualunque sia il punto P sul piano α; il generico punto del piano α ha coordinate

$$P(-2y+4z+3,y,z),$$

e infatti il comando

rifpC(1,2,-4,-2*y+4*z+3,y,z);

dà ancora in uscita la stessa matrice **M**.

Inoltre ogni punto del piano α è fisso: il comando

evalm(M &* [-2*y+4*z+3,y,z,1]);

dà in uscita il vettore

$$[-2y+4z+3 \quad y \quad z \quad 1]$$

come ci aspettavamo.

Infine la riflessione rispetto ad un piano è involutoria; il comando

evalm(M^2);

dà infatti in uscita la matrice identità. ≡

Mediante le funzioni sin qui definite è possibile costruire la matrice di qualunque isometria nello spazio.

7. Conclusioni

Il lavoro qui presentato, svolto nel piano e (parzialmente) nello spazio con studenti *volontari* dell'ultimo anno di liceo, ha permesso di costruire con MAPLE un pacchetto di funzioni, che arricchiscono la nostra libreria. Ora, richiamando

tale pacchetto, è possibile svolgere parecchie attività didattiche significative e non banali *liberati dalle difficoltà di calcolo*.
Per esempio possiamo risolvere il problema inverso: data una matrice ortogonale riconoscere quale isometria rappresenti, oppure analizzare il gruppo delle isometrie del cubo, oppure svolgere qualche applicazione di computer-grafica, per esempio rappresentare in assonometria sul piano figure spaziali.
Ecco quindi un esempio di una attività didattica di tipo nuovo: alla fase di calcolo si sostituisce la fase di progettazione di nuovi strumenti matematici (le funzioni implementate).
Lo studente apprende matematica di buon livello con la soddisfazione di aver costruito da sé gli strumenti necessari allo studio.

Bibliografia.

H. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wesley Addison
M. Armstrong, *Grous and symmetry*, Springer