UN PROBLEMA DI RISIKO

Un'applicazione della probabilità condizionata

Michele Impedovo
michele.impedovo@uni-bocconi.it

1. Il problema

A "Risiko", un gioco di simulazione, ogni giocatore è, a turno, "difensore" oppure "attaccante". Attaccante (A) e difensore (D) si sfidano con i dadi e il difensore, come è giusto che sia, vince anche in caso di parità.
Vediamo la situazione più semplice, in cui A e D si sfidano con un dado a testa: D vince se l'uscita del proprio dado è maggiore o uguale a quella di A. Costruiamo una tabella delle 36 possibilità.

		Difensore					
		1	2	3	4	5	6
Attaccante	1	D	D	D	D	D	D
	2	A	D	D	D	D	D
	3	A	A	D	D	D	D
	4	A	A	A	D	D	D
	5	A	A	A	A	D	D
	6	A	A	A	A	A	D

Come si vede A vince con probabilità 15/36 = 5/12 = 41.7%, D vince con probabilità 7/12 = 58.3%.

2. Un po' più difficile: due contro uno

Supponiamo ora che A attacchi con due dadi, mentre D si difende con 1 dado: in questo caso A vince se almeno uno dei suoi dadi è maggiore di quello di D. Il calcolo della probabilità di vittoria di A è ora un po' più complicato; il numero di casi possibili è uguale a 6 elevato al numero di dadi in gioco, nel nostro caso 3, quindi $6^3 = 216$.
Proviamo innanzitutto ad applicare il *metodo Montecarlo*, cioè ad effettuare una simulazione dell'esperimento un gran numero di volte e valutare se i risultati sperimentali si avvicinano a quelli teorici. Un programma potrebbe essere il seguente, dove n è il numero di esperimenti effettuati, rand(6) genera un numero casuale compreso tra 1 e 6 .

```
c:=0
for i from 1 to n do
 A1:=rand(6)
 A2:=rand(6)
 D1:=rand(6)
 if max(A1,A2)>D1 then c:=c+1
c/n
```

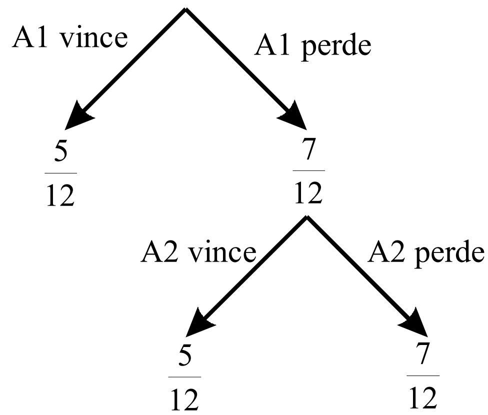
Utilizzando MAPLE con n = 100000, otteniamo che A vince con probabilità 57.7%.
Per avere il risultato esatto usiamo ora la forza bruta: scriviamo un programma che per ogni uscita di tre dadi (chiamiamoli A1, A2, D1) stabilisca se vince A e in questo caso aumenti di 1 un contatore.

```
c:=0
for A1 from 1 to 6 do
 for A2 from 1 to 6 do
  for D1 from 1 to 6 do
   if max(A1,A2)>D1 then c:=c+1
c
```

Si ottiene che A vince con probabilità 125/216 = 57.9% e perde con probabilità 91/216 = 42.1%. La situazione si è ribaltata: concedere al difensore la vittoria in caso di parità non è sufficiente; se l'attaccante può sfidare con due dadi contro uno vince circa 6 volte su 10.

3. Il grafo

Un altro modo per calcolare questa probabilità consiste nel costruire il grafo degli eventi.
D lancia il suo dado D1.
A lancia il primo dado A1; se A1>D1 (con probabilità 5/12) A vince (indipendentemente dal secondo dado); se A1≤D1 allora A lancia il secondo dado, che vince contro D1 sempre con probabilità 5/12. Il grafo ad albero potrebbe essere (ma come vedremo non è) il seguente:



Se così fosse la probabilità di A di vincere sarebbe $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12} = \frac{95}{144}$ ≈ 66%, e ciò è falso, dato che sappiamo che la probabilità di vittoria di A è 125/216.

4. Che cosa c'è di sbagliato?

Quando si lancia il secondo dado non è vero che la probabilità di vittoria di A2 contro D1 sia ancora 5/12: il fatto che A1 abbia perso influisce sulla probabilità di A2; in altri termini, gli eventi "A1 perde" e "A2 vince" non sono indipendenti: se A1 ha perso, un qualche modo le probabilità di vittoria di A2 sono diminuite. È necessario utilizzare la *probabilità condizionata*: la probabilità che A2 vinca è condizionata dal fatto che A1 abbia perso. Dobbiamo cioè calcolare

$$p(\text{A2 vince} \mid \text{A1 perde})$$

Se poniamo A = "A2 vince" e B = "A1 perde" sappiamo che, per definizione

$$p(A|B) := \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

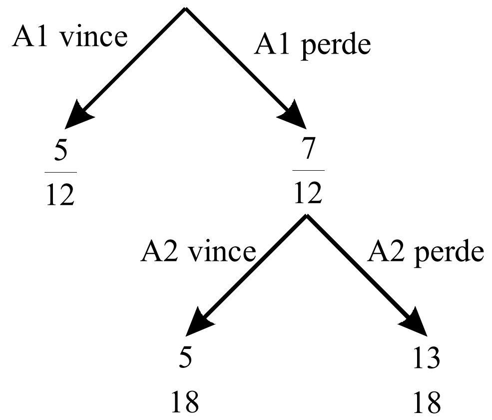
Contiamo il numero di eventi favorevoli, su 6^3, al verificarsi di $A \cap B$: sono 35. Quindi

$$p(A \cap B) = \frac{35}{216}.$$

Poiché $p(B)$=7/12, risulta

$$p(A|B) = \frac{\frac{35}{216}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{18}.$$

Come ci aspettavamo, la probabilità condizionata p(A2 vince|A1 perde) è minore della probabilità p(A2 vince) = 5/12.
Possiamo ora completare il grafo correttamente:



Se calcoliamo di nuovo la probabilità di vittoria di A otteniamo il risultato corretto:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{12}\frac{5}{18} = \frac{125}{216}.$$

5. Sempre più difficile: *n* contro uno

Supponiamo ora che A attacchi con n dadi e D si difenda con un dado. La probabilità di A di vincere ovviamente aumenta. Come possiamo calcolarla?
Calcoliamo la probabilità p di vittoria per D, la probabilità di vittoria per A sarà $1-p$.
Analizziamo il caso in cui A attacchi con 3 dadi e D si difenda con 1: i casi possibili sono 6^4. I casi favorevoli a D possono essere contati per somma, a seconda che il dado di D sia 1, 2, …, 6.
Se D fa 6 A perde per qualunque uscita dei suoi tre dadi, quindi i casi favorevoli a D sono 6^3.
Se D fa 5 A perde in tutti i casi in cui i suoi tre dadi sono minori o uguali a 5; quanti sono? Poiché l'uscita di ciascun dado è indipendente dagli altri, abbiamo 5 casi favorevoli a D per ciascun dado di A, e quindi $5\cdot5\cdot5 = 5^3$ casi favorevoli a D.
In modo analogo possiamo dire che se D fa 4 A perde in $4\cdot4\cdot4$ casi, quindi i casi favorevoli a D sono 4^3, e così via. Concludendo, i casi favorevoli a D nella situazione 3 dadi contro 1, sono pari a

$$\sum_{k=1}^{6} k^3$$

e la probabilità di vittoria per A è

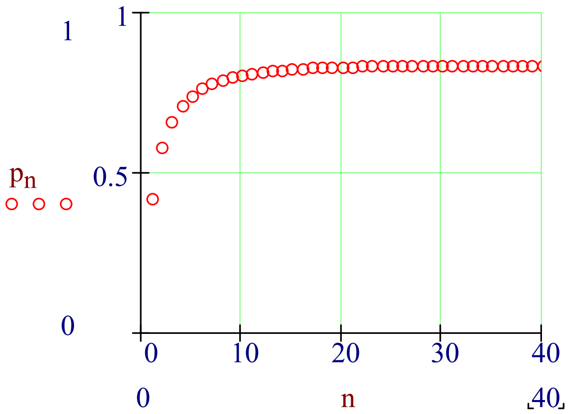
$$1 - \frac{\sum_{k=1}^{6} k^3}{6^4} = 95/144 \approx 66\%.$$

La generalizzazione a n dadi è immediata; la probabilità che A vinca lanciando n dadi contro un solo dado di D è

$$p_A(n) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{6} k^n}{6^{n+1}}.$$

6. E se *n* tende all'infinito?

Al crescere di n le probabilità di vittoria per A aumentano, questo è ovvio. Che cosa accade se n tende all'infinito? Si potrebbe supporre che le probabilità di vittoria per A tendano a 1. Ma se tracciamo il grafico della successione $p_A(n)$ scopriamo che così non è:



Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^n}{6^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(6^n + 5^n + \ldots + 1^n\right)}{6^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6^n\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \ldots + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}{6^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \ldots + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{6} = \frac{1}{6}.$$

Quindi la probabilità di A aumenta al crescere di n, ma non tende a 1, bensì a 5/6. Questo è ragionevole, perché se D fa 6 (con probabilità 1/6), A perde comunque. Se A lancia un numero infinito di dadi non può comunque assicurarsi la vittoria certa, perderà 1 volta su 6.