L’infinito: un itinerario didattico tra matematica e filosofia

Luigi Tomasi, L.S. “Galilei” di Adria (*Ro*), *SSIS Università di Ferrara*

“Ci sono due famosi labirinti in cui la nostra ragione spesso si perde: problema della libertà e necessità da un lato, dall’altro continuità e infinito” (G.W. Leibniz)

Sommario

Premessa 1
Attività in classe con supporti tradizionali 3
Attività della classe con l’uso della rete; commento ai siti consultati 12
Verifiche 12
Conclusioni 13
Riferimenti bibliografici 13

Premessa

L’ultima parte dell’itinerario sull’infinito matematico qui delineato è stata effettivamente svolta in una classe quinta di liceo scientifico sperimentale per la matematica (con il programma del PNI - Piano Nazionale per l’Informatica), occupando il lavoro della classe per circa tre settimane, nella parte finale dell’anno scolastico, in preparazione del colloquio di esame. Diversi spunti tuttavia, ai quali si accenna nel seguito, possono costituire una buona base di lavoro anche nelle classi precedenti e possono essere finalizzati non soltanto all’esame, ma soprattutto per presentare la matematica come essa è, ovvero come parte integrante della cultura e del pensiero.
L’esame di stato prevede la possibilità per gli studenti di presentare, all'inizio del colloquio, un argomento che sia stato approfondito da tutta la classe o individualmente nel corso dell’ultimo anno. L’argomento qui delineato si presta particolarmente bene ad essere affrontato da diversi punti di vista, con il contributo di diverse discipline, in modo, appunto, “pluridisciplinare” e richiede una conoscenza della matematica estesa a tutto il corso di studi di scuola superiore. A volte gli studenti preparano questi percorsi senza un adeguato approfondimento, limitandosi a “scaricare” dalla rete informazioni che poi, a volte, non sanno organizzare e discutere. E’ quindi necessario che, con la guida dei docenti, le fonti vengano verificate in modo rigoroso, in modo da evitare di stabilire dei “collegamenti” gratuiti e non fondati.
Il tema è quindi pensato come un itinerario di matematica per le classi finali della scuola secondaria con l’uso della rete Internet, ma anche degli strumenti didattici tradizionali, che affronta un tema particolarmente affascinante, alla base di molta parte del pensiero matematico, con forti collegamenti con la filosofia. Il tema attraversa l’intera storia della matematica e può costituire una sorta di “filo rosso” attorno al quale esaminare le opere dei molti matematici che hanno cercato di “imbrigliare” il concetto di infinito e, in un certo senso, di “addomesticarlo”.
David Hilbert (1921) afferma:
L’infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così proficuamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito”.

David Hilbert (1862-1943)

Molto di quello che si studia in matematica si incentra su tali concetti. L'infinito è un concetto caratteristico della matematica. In geometria si parla di "infinita" prolungabilità della retta, della possibilità di suddividere un segmento in n parti uguali, con n che può essere "grande quanto si vuole"; di approssimazione dell'area del cerchio con poligoni regolari inscritti e circoscritti, ecc. In analisi matematica, che non dimentichiamolo si chiama anche "infinitesimale", l'infinito è continuamente presente in tutti i problemi ed anzi se ne fa un uso "disinvolto". Non si può parlare di concetti fondamentali della matematica – come quelli di numero reale, di continuità, di derivabilità e di integrabilità di una funzione – senza fare uso della nozione di limite di una funzione. Ebbene, nella nozione di limite, che nella storia della matematica ha richiesto un tempo piuttosto lungo per la sua definizione, si utilizza continuamente la nozione di "infinito" ed esistono dei teoremi che insegnano quasi a fare un "calcolo con gli infiniti". L'infinito viene quindi dominato e quasi sottoposto ad un calcolo algebrico nello studio dell'analisi matematica. Questo "dominio" sull'infinito, raggiunto progressivamente con la sistemazione dell'analisi matematica, costituisce un apprendistato piuttosto faticoso quando un allievo inizia lo studio dei limiti di funzione. L'analisi matematica costituisce la base di tutti gli studi scientifici, in particolare costituisce il linguaggio della fisica e di tutte le discipline scientifiche e tecnologiche che utilizzano lo strumento matematico.
Da queste considerazioni di carattere generale consegue la proposta di un itinerario didattico volto ad approfondire il concetto di infinito matematico, per farne scoprire la valenza culturale ed anche per comprendere il legame della matematica con la filosofia, per far avvicinare gli allievi ad alcuni momenti particolarmente significativi della storia del pensiero matematico.
Per una prima introduzione al concetto di "infinito", si può consultare la seguente pagina nel bellissimo sito creato da Alexander Bogomolny, professore di matematica nella Iowa University, USA:
http://cut-the-knot.com/do_you_know/few_words.html#infinity
oppure l'ottima voce "Infinito" nel *Dizionario di Matematica elementare* di Stella Baruk (citato nella bibliografia).
L'infinito è causa di paradossi e antinomie (o contraddizioni). Negli *Elementi* di Euclide – libro I, Nozione comune VIII - si trova l'affermazione "il tutto è maggiore della parte", che viene superata in Cantor. Anche Galileo si scontra con i paradossi dell'infinito: i quadrati "perfetti", i quadrati dei numeri naturali, sono tanti quanti sono i numeri naturali. Quando si tratta di insiemi infiniti l'affermazione "il tutto è maggiore della parte" non è più valida; tale affermazione, anzi, può essere usata per definire un insieme infinito, come farà Richard Dedekind (1831 – 1916) alla fine dell'Ottocento.

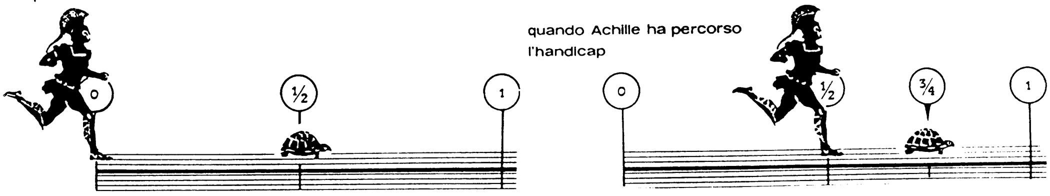
Richard Dedekind (1831-1916)

Una delle più grandi rivoluzioni del pensiero matematico si sviluppa nella seconda metà dell'Ottocento quando viene introdotta, per opera soprattutto di Georg Cantor (1845-1918), la teoria degli insiemi, che sarà alla base di tutta la matematica del Novecento. Cantor introduce il concetto di "cardinalità" di un insieme e dimostra che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali, detta anche "cardinalità del continuo", è maggiore della cardinalità dell'insieme dei numeri naturali , la "cardinalità del numerabile". Questo significa che è impossibile mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri naturali con l'insieme dei numeri reali. Con un celebre procedimento Cantor dimostra invece che l'insieme dei numeri razionali può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali e che quindi l'insieme dei razionali è un insieme numerabile.
Con Lucio Lombardo Radice (1916-1982), possiamo dunque dire che "Georg Cantor scopre, misura e classifica il transfinito" (*L'infinito*, Roma 1981).
Elenchiamo nel seguito, senza la pretesa di essere esaustivi, una serie di argomenti, che il docente di matematica può sviluppare nelle ultime classi della scuola media superiore, che si ricollegano tutti al tema dell'infinito in matematica.

Attività in classe con supporti tradizionali

In classe sono stati affrontati gli ultimi argomenti dell'elenco riportato nel seguito; alcuni di essi sono delle letture, altri invece sono delle vere e proprie parti del programma di matematica sperimentale (del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica e dei programmi della Commissione "Brocca"):

- I pitagorici e la scoperta delle grandezze incommensurabili.
- I paradossi di Zenone di Elea (circa 490 a.C. - 425 a.C.); il paradosso di Achille e la tartaruga. Infinito potenziale e infinito attuale: la posizione di Aristotele.



Achille e la tartaruga

«Se gli esseri sono molti è necessario che essi siano tanti quanti sono e né di più né di meno. Ma se sono tanti quanti sono, saranno limitati. Se sono molti, gli esseri sono

infiniti. Infatti tra l'uno e l'altro di questi esseri ve ne saranno sempre altri e tra l'uno e l'altro di questi altri ancora. E così gli esseri sono infiniti».
Il famoso paradosso di Achille e la tartaruga, uno dei quattro argomenti di Zenone contro il moto, è descritto da Aristotele nella sua *Fisica*:
«Il secondo è l'argomento detto d'Achille. Esso dice che il più lento non sarà mai raggiunto nella corsa dal più veloce. Infatti è necessario che chi insegue giunga prima al punto da cui è partito chi fugge, cosicché il più lento si troverà necessariamente un po' più avanti del più veloce. La conseguenza di quest'argomento è che il più lento non vien raggiunto».
In un suo articolo Michele Emmer (vedi bibliografia) scrive:

> La difficoltà si basa sulla divisibilità infinita dello spazio. Ma allora Achille raggiunge o no la tartaruga? Come si sarà capito vi sono due aspetti nel problema, uno filosofico «buono» ed uno matematico «cattivo», per dirla con Hegel. Si può dimostrare in modo semplicissimo il problema matematico con un risultato che dipende dalla velocità dei due corridori come è ovvio, credo, secondo la logica di chiunque. Il che non vuol dire che non resti il problema della divisibilità del tempo e dello spazio dal punto di vista filosofico. Nel suo ampio saggio *Breve storia dell'infinito* (Adelphi, 1980) il matematico Paolo Zellini considera l'argomento della dicotomia portato da Zenone per negare il moto. «In tale argomento si sostiene che chi desideri percorrere una unità di lunghezza non potrà mai portare a compimento la sua impresa perché dovrà percorrere la successione infinita di intervalli in cui l'unità è divisibile per dicotomia. «Per arrivare da 0 a 1 si raggiunge 1/2, poi 1/2+1/4=3/4, poi 7/8 e così via, percorrendo successivamente intervalli di ampiezza 1/2,1/4,1/8,1/16, ... 1/2 elevato ad *n* ... che appare manifestamente impossibile perché gli intervalli sono in numero infinito.
> Con la nozione matematica di convergenza di una serie, in modo analogo al caso di Achille e la Tartaruga, si supera la difficoltà dimostrando che al crescere di *n* (quando *n* tende all'infinito) la somma parziale 1/2+ 1/4........... tende a 1. Se dal punto di vista matematico è chiaro che Achille raggiunge la tartaruga, e si può calcolare il tempo che ci impiega, aggiunge giustamente Zellini che «la dimostrazione di Zenone sembra tuttavia invulnerabile, nella sua intenzione ancor più che nel suo specifico svolgimento dialettico, da ogni confutazione che faccia uso della nozione matematica di limite... Come immagine speculare negativa dell'esemplare celato al di là di ogni rappresentazione l'*apeiron* (infinito) poteva essere allora un paradossale richiamo simbolico a Dio... L'idea potrebbe estendersi oltre, al male e al non-essere, fino a farne la prova che un mondo privo di Dio ne indica da lontano la prova».

- Euclide e l'infinità dei numeri primi; un esempio di infinito potenziale (in *Gli Elementi,* Libro IX, proposizione 20):
  Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti numeri si voglia proporre.
  Riportiamo la dimostrazione qui di seguito, usando solo in parte il linguaggio di oggi.

> "Siano a, b, c i numeri primi proposti. Dico che esistono numeri primi in maggior numero che a, b, c."
> Dimostriamo allora che esiste un quarto numero primo. Si costruisce allora il numero intero $d = abc + 1$; questo numero d non è divisibile per a, per b e per c. Se d è primo allora abbiamo dimostrato l'esistenza di un quarto numero primo. Se d non è primo esso ammette un divisore che è primo; chiamiamo questo numero h. Dimostriamo che h è diverso da a, b e c.

Se, infatti, il numero *h* fosse uguale ad uno dei tre numeri *a, b, c,* esso dividerebbe il prodotto *abc*. Ma si è supposto che il numero *h* divida anche *d*=*abc*+1, quindi *d* dividerebbe anche la differenza tra (*d*=*abc*+1) e *abc,* ossia l'unità, da cui l'assurdo. Euclide conclude:
"Dunque si sono trovati numeri primi, cioè *a, b, c, d*, più numerosi di quanti numeri si siano proposti all'inizio, cioè *a, b, c*. Come dovevasi dimostrare".

La dimostrazione di questa proposizione è ammirabile e andrebbe letta in classe, così come leggiamo le opere dei poeti e degli scrittori. Euclide non nomina mai la parola "infinito", ma evoca l'infinità dei numeri primi in senso potenziale.

- Archimede e il metodo di esaustione. Si può proporre in classe il procedimento usato da Archimede per determinare l'area del cerchio e l'area del segmento parabolico.
- Galileo e l'infinito.
- La nascita del calcolo differenziale (Cavalieri, Torricelli, Fermat, Newton, Leibniz,…); le critiche di Berkeley in *L'analista infedele*.
- Bernhard Bolzano (1781-1848), *I paradossi dell'infinito* (*Paradoxien des Unendlichen*)

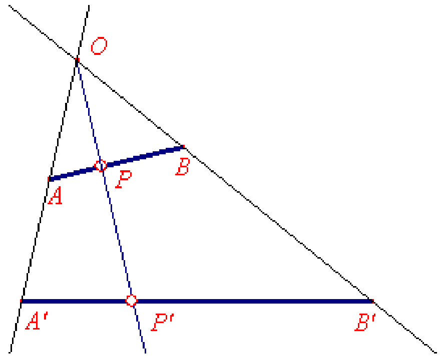
Bernhard Bolzano (1781-1848)

«Le affermazioni paradossali che si incontrario in matematica sono certamente per la maggior parte, benché non tutte, proposizioni che o contengono in modo immediato il concetto di infinito, o si fondano in qualche modo su tale concetto attraverso la dimostrazione per esse proposta. Ancor meno discutibile è il fatto che tale categoria di paradossi matematici includa precisamente quelli che meritano il nostro esame più accurato, in quanto la soluzione di problemi molto importanti di altre scienze, come la fisica e la metafisica, dipende da una soddisfacente confutazione delle loro apparenti contraddizioni». «Che l'infinito sia contrapposto ad ogni mero finito è già espresso nel termine stesso. I matematici hanno fatto uso del termine infinito in altro senso che questo: se trovano una quantità maggiore di qualsiasi numero di unità assunte, la chiamano infinitamente grande; se trovano una quantità così piccola che ogni suo multiplo è minore dell'unità, la chiamano infinitamente piccola; né riconoscono alcuna altra specie di infinito oltre queste due e oltre specie da esse derivate, infinitamente più grandi o infinitamente più piccole, che discendono tutte dallo stesso concetto. Alcuni filosofi però, per esempio Hegel e i suoi seguaci, non sono soddisfatti di questo infinito dei matematici e lo chiamano con disprezzo cattiva infinità, rivendicando la conoscenza di un infinito molto superiore, il vero infinito, l'infinito qualitativo, che essi trovano solo in Dio, e in generale nell'Assoluto».
(da Bernhard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, 1847/48, edizione italiana, *I paradossi dell'infinito* a cura di F. Voltaggio, Feltrinelli, 1965).

- La definizione di limite (Cauchy, Weierstrass,..): limite di una successione e limite di una funzione; approfondimenti sulla definizione di limite; infiniti e infinitesimi; gli asintoti di una funzione
- Teoria degli insiemi e confronto tra insiemi infiniti (G. Cantor)
- Paradossi e antinomie. La crisi dei fondamenti della matematica
- Il principio di induzione matematica (G. Peano)

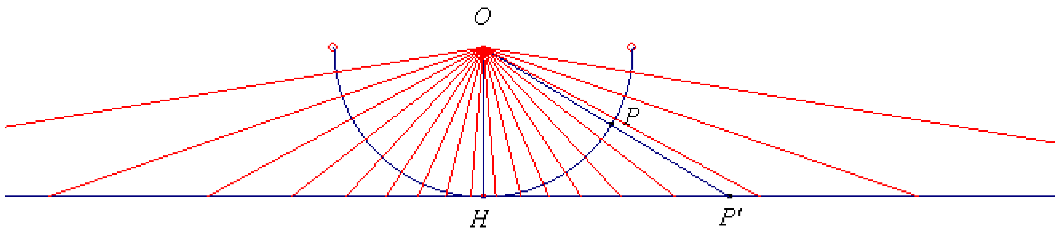
Alcuni esempi di insiemi tra loro in corrispondenza biunivoca (hanno la stessa cardinalità):

- Due segmenti qualunque possono essere messi in corrispondenza biunivoca tramite una proiezione centrale.



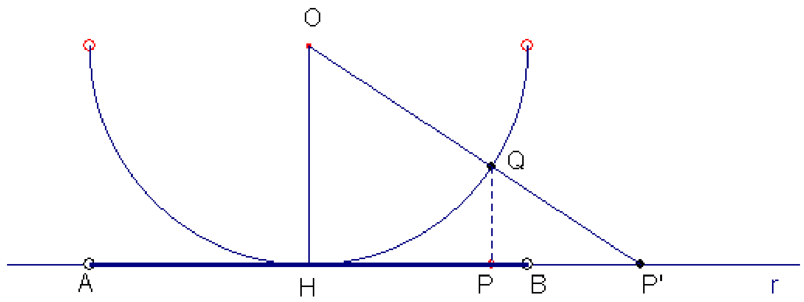
I punti di AB sono "tanti quanti" quelli di A'B'

- Un semicirconferenza aperta (senza i punti estremi) può essere messa in corrispondenza biunivoca con una retta. Ad ogni punto *P* della semicirconferenza corrisponde un punto *P'* e viceversa ad ogni punto *P'* della retta corrisponde un punto della semicirconferenza.



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

In definitiva, quindi, ogni intervallo aperto può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insiemi dei punti di una retta. Quindi i punti di una retta sono "tanti quanti" sono i punti di un intervallo aperto. Nella figura seguente tale corrispondenza viene illustrata in modo grafico.
Si considera un segmento aperto AB e si disegna una semicirconferenza (privata dei punti estremi) tangente al segmento nel punto medio H di AB. Ad un punto P del segmento AB, facciamo corrispondere il punto Q (basta mandare la perpendicolare per P al segmento AB). Si considera ora la semiretta OQ di origine O. Tale semiretta fa corrispondere al punto Q il punto P' della retta AB.
In questo modo abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra il segmento (aperto) AB e la retta r. Tale corrispondenza, scelto un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali, può essere espressa anche in modo analitico.

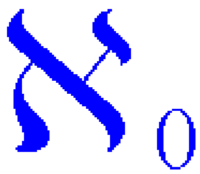


Corrispondenza biunivoca tra il segmento AB e la retta r.

Un altro esempio paradossale che si può presentare in classe, per approfondire il concetto di infinito, va sotto il nome di "albergo di Hilbert". Si tratta di uno strano albergo, con un numero infinito (numerabile) di stanze. Anche se l'albergo ha le stanze tutte occupate, è sempre possibile accogliere un nuovo cliente o addirittura liberare un numero infinito di stanze. Ad esempio si possono spostare tutti i clienti nelle stanze di numero pari; in questo modo si liberano tutte le infinite stanze di numero dispari. Si veda il seguente sito:
http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/infinity/inhotel.html

- La teoria degli insiemi di G. Cantor; cardinalità di un insieme; la parte può essere uguale al tutto; insiemi finiti ed infiniti.

La cardinalità dell'insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (aleph con 0); si tratta della prima lettera dell'alfabeto ebraico con l'indice 0. Ogni insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei naturali ha la stessa cardinalità dei numeri naturali. Ad esempio l'insieme dei numeri pari, che è un sottoinsieme dei numeri naturali, ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali. In questo senso, dunque, la parte può essere "uguale" al tutto.



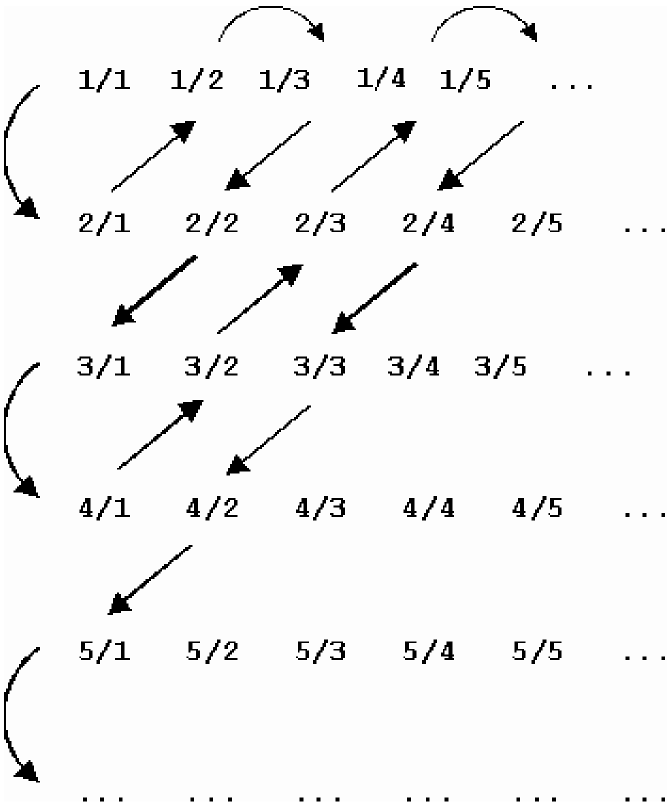
Aleph 0

- Dal numerabile al continuo; confronto tra insiemi infiniti.

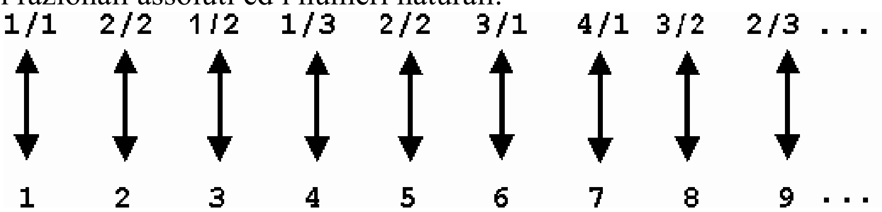
Georg Cantor (1845 - 1918)

- L'insieme dei numeri razionali è numerabile; i numeri reali hanno una cardinalità maggiore della cardinalità del numerabile

Nelle figure seguenti è riportata la dimostrazione che l'insieme dei numeri razionali assoluti è un insieme numerabile; la stessa dimostrazione può essere ripetuta per l'insieme dei numeri razionali relativi.
Nella prima riga vengono scritti tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore un numero naturale non nullo; nella seconda riga scriviamo tutte le frazioni con numeratore 2, e così via…
In questo modo vengono scritti tutti i numeri razionali assoluti, eventualmente anche con delle ripetizioni. Le frecce indicate nella figura, che procedono in senso diagonale, mostrano la possibilità di mettere in una unica "fila" i numeri razionali assoluti.



Possiamo anche scrivere come indica la seguente figura, che indica una corrispondenza biunivoca tra i razionali assoluti ed i numeri naturali.



Quindi:
I numeri razionali sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali (*i due insiemi hanno la stessa cardinalità*).

Il passo successivo che si può introdurre in classe è quello di dimostrare che i numeri reali dell'intervallo aperto]0, 1[*non* possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.
La dimostrazione viene condotta per assurdo. Supponiamo che i numeri reali dell'intervallo]0, 1[formino un insieme numerabile. In questo caso sarà possibile scriverli in un "elenco"

numerabile in cui ciascun numero reale tra 0 e 1 sarà contrassegnato da un numero naturale *n*. Il primo numero reale dell'intervallo, si potrà scrivere come:

$$0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ldots$$

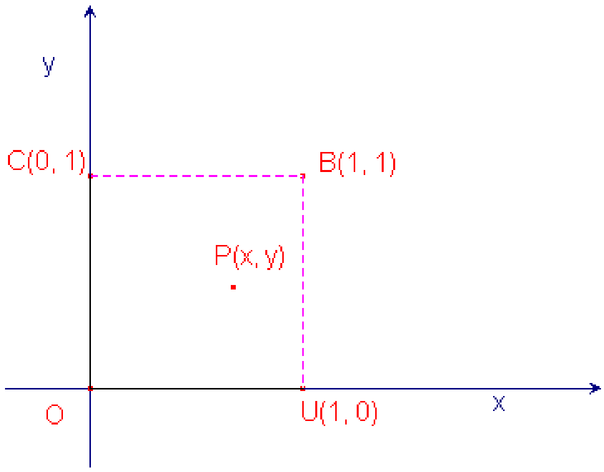
dove $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,\ldots$ sono le cifre dopo la virgola.
Costruiamo ora, seguendo il procedimento di Cantor, un nuovo numero reale compreso tra 0 ed 1, che non è elencato nella figura seguente.

$1 \longleftrightarrow 0,$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.
$2 \longleftrightarrow 0,$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	.	.	.
$3 \longleftrightarrow 0,$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	.	.	.
$4 \longleftrightarrow 0,$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	.	.	.
$5 \longleftrightarrow 0,$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	.	.	.
$6 \longleftrightarrow 0,$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	.	.	.
....	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Il numero ha come prima cifra **0**. Al primo posto dopo la virgola si si sceglie una cifra diversa da a_1, al secondo posto si sceglie una cifra diversa da b_2, al terzo posto si sceglie una cifra diversa da c_3, e così via…
Con questo procedimento, detto "diagonale", viene costruito un numero reale compreso tra 0 e 1, che però è diverso da tutti quelli dell'elenco precedente, contro l'ipotesi che l'elenco indicasse tutti i numeri compresi tra 0 e 1. Si è arrivati dunque ad un assurdo.
Pertanto l'insieme dei numeri reali dell'intervallo]0, 1[non è "numerabile". Ne consegue quindi che l'insieme dei numeri reali non può essere posto in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. La "cardinalità" (o "potenza") dei numeri reali è quindi maggiore della cardinalità del numerabile. La cardinalità dei numeri reali si chiama cardinalità del "continuo" e si indica con la lettera gotica $\mathfrak{c}$.

- I punti del piano (e dello spazio) sono "tanti quanti" sono i punti di una retta.

A proposito di quest'ultimo teorema lo stesso Cantor, in una lettera a Dedekind del 1877, afferma: "Lo vedo ma non ci credo !".
Si veda il sito:
http://cut-the-knot.com/do_you_know/cantor.html
In effetti l'enunciato è molto sorprendente perché in esso si afferma la possibilità di costruire una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i punti del piano.
In classe è stata fatta la dimostrazione che l'intervallo aperto]0, 1[può essere messo in corrispondenza biunivoca con il quadrato aperto "unitario" di vertici (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1).
Si tratta di costruire una corrispondenza biunivoca tra i punti del quadrato e i punti di un suo lato, ad esempio OU. In un sistema di riferimento cartesiano sia Q un quadrato di vertici (0,0); (0,1); (1,1), (1,0).



Un punto P del quadrato avrà coordinate (x, y), dove x e y sono numeri reali compresi tra 0 e 1 e possono essere scritti in forma decimale:

$$x = 0{,}a_1a_2a_3... \qquad y = 0{,}b_1b_2b_3...$$

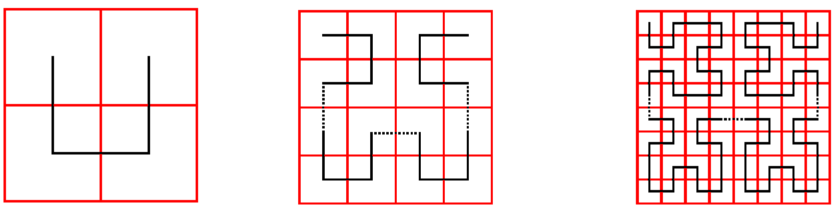
dove a_i e b_i sono cifre comprese tra 0 e 9 (ad esempio 0,539236...).
Alla coppia ordinata (x, y), che identifica univocamente il punto P, si può far corrispondere il numero reale compreso tra 0 e 1

$$c = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3...$$

che identifica univocamente un punto del lato del quadrato.
Viceversa ad un qualunque punto del lato OU cui corrisponde univocamente il numero decimale

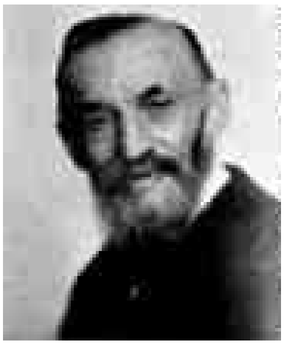
$$c = 0{,}c_1c_2c_3c_4c_5c_6...$$

si può far corrispondere la coppia ordinata formata da $x = 0{,}c_1c_3c_5...$ e $y = 0{,}c_2c_4c_6...$ che individua un punto del quadrato.
La corrispondenza biunivoca tra punti del quadrato e punti di un suo lato è così costruita e l'affermazione iniziale è pertanto dimostrata.
La corrispondenza ora definita, tuttavia, sfugge alla nostra intuizione perché non è facilmente visualizzabile anche con i software matematici più sofisticati oggi a disposizione.
Per convincersi della possibilità di mettere in corrispondenza i punti di una retta ed i punti del piano, si possono vedere delle curve particolari, che progressivamente riempiono il piano, nella seguente pagina:
http://cut-the-knot.com/do_you_know/hilbert.html
Una delle curve più famose che progressivamente "riempie" il piano è la curva di Peano.



La curva di Peano

Peano propone l'esempio di una curva "ricorsiva" che, al limite, riempie tutto il piano. Talvolta tale curva viene anche chiamata curva di Hilbert. Si veda la pagina citata sopra dove, tramite un "applet" un programma che viene eseguito in una pagina Web, è possibile fare esperimenti interattivi sulla curva di Peano:
http://cut-the-knot.com/do_you_know/hilbert.html



Giuseppe Peano (1858-1932)

Ci sono analoghe curve che "riempiono tutto lo spazio" e che stabilisco dunque una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta ed i punti dello spazio tridimensionale.

- I paradossi e le antinomie

Lucio Lombardo Radice nel suo libro (purtroppo ormai introvabile se non in una buona biblioteca) *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma 1981, dà le seguenti definizioni di paradosso e di antinomia:
paradosso = affermazione incredibile, contraria alla opinione corrente ed intuitiva;
antinomia = contraddizione; si ha una antinomia se in una data teoria è possibile dimostrare una affermazione e contemporaneamente la sua negazione (*p* ed anche "*non p*").

- La crisi dei fondamenti della matematica

Usando la teoria degli insiemi è possibile costruire delle antinomie. La più famosa delle antinomie è quella formulata da Bertrand Russell (1903). In seguito al ritrovamento di queste antinomie si sviluppa una discussione su quali siano i fondamenti della matematica, che va sotto il nome di "crisi dei fondamenti" e nascono dubbi sulla teoria degli insiemi creata da Cantor. A proposito di questi dubbi David Hilbert (1921) afferma: "Nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi".

- L'ipotesi del continuo (Kurt Gödel e Paul J. Cohen)

Che cos'è l'ipotesi del continuo? Sinteticamente ci si riferisce alla seguente domanda:
Tra la cardinalità dei razionali e quella dei reali esiste una cardinalità intermedia?
Nella prima metà del XX secolo ai matematici si è posta tale questione che è di natura simile a quella del V postulato de *Gli Elementi* di Euclide: "L'ipotesi del continuo è vera o falsa?"
Si trattava di dimostrare che non c'era un cardinale intermedio tra "aleph0" e "aleph1", tra la cardinalità del numerabile e quella del continuo.
La risposta fu data in modo graduale. Nel 1938 Kurt Gödel dimostrò che non si poteva dimostrare che l'ipotesi del continuo fosse *falsa* rimanendo nel quadro della teoria assiomatica degli insiemi formulata da Ernst Zermelo (1871-1953) e Abraham A. Fränkel (1891-1965).
Nel 1963 Paul J. Cohen dimostrò che non si poteva dimostrare che l'ipotesi del continuo fosse *vera* nel quadro della teoria degli insiemi.
Dunque la questione dell'ipotesi del continuo è in decidibile rimanendo all'interno della teoria degli insiemi. Si può supporre dunque supporre che non esista un cardinale intermedio tra il numerabile e il continuo, come si può supporre il contrario e questa supposizione non creerà contraddizioni.

Attività della classe con l'uso della rete; commento ai siti consultati

La rete Internet offre ormai una miriade di siti dedicati alla matematica ed al suo insegnamento.
Il sito che è stato maggiormente utilizzato, con la guida dell'insegnante, è stato il seguente:
MacTutor History of Mathematics Archive (Università di St.Andrews, Scozia)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
Quest'ultimo è probabilmente il miglior sito di Storia della Matematica esistente in rete, da dove si possono ricavare le biografie di centinaia di matematici e molte altre informazioni interessanti di storia della matematica. Tra l'altro c'è la possibilità di consultare e di prelevare articoli monografici di storia della matematica.
Altri materiali interessanti sono stati trovati nei seguenti siti:
http://www.vordenker.de/gunther_web/achill1.htm
http://www.uwec.edu/Academic/Curric/andersrn/cardinalweb.htm
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html

La rete, quindi, può essere un ottimo strumento per trovare risorse didattiche per l'insegnamento della matematica.
Quasi tutti gli studenti sanno usare la rete e i programmi di navigazione (browsers); l'insegnante dovrebbe insistere particolarmente sull'uso dei "motori di ricerca".
L'insegnante ha segnalato agli allievi i siti più noti e di verificata qualità scientifica. In particolare l'insegnante ha guidato gli allievi alla consultazione di alcuni siti dedicati alla storia della matematica. Questo ha permesso di prelevare diversi materiali, sotto forma ipertestuale, e la raccolta di testi, immagini, biografie di matematici e immagini collegati all'argomento scelto.

Verifiche

Sulle attività svolte gli studenti hanno preparato una sintesi del lavoro, in forma ipertestuale usando semplicemente un programma di videoscrittura oppure un "editor" per costruire pagine in formato HTML adatte al Web. Tali materiali sono stati presentati all'esame finale di liceo scientifico come approfondimento degli studenti e della classe.
L'insegnante, al termine del percorso didattico, ha inoltre costruito una prova di verifica sotto forma di questionario con risposte chiuse o a breve risposta aperta.

Esempi di domande a risposta aperta

1. Può esistere un numero con periodo 9 ? (ad esempio $0,\overline{9}$).
2. Il simbolo ∞ rappresenta un numero?
3. Perché la scrittura $\frac{1}{0}=\infty$ è considerata errata?
4. Spiega il significato di:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 .$$
5. Spiega il significato della seguente scrittura:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...=2 .$$
6. $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$. Come si spiega che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità?
7. Descrivere come l'intervallo aperto]0, 1[può essere messo in corrispondenza biunivoca con la retta reale?
8. Dimostrare che la cardinalità di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è la stessa di $\mathbb{N}$.

9. In cosa consiste il procedimento dimostrativo per induzione?
10. Dimostrare per induzione la formula che fornisce la somma dei primi n quadrati dei numeri naturali:

$$1+4+9+...+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

Conclusioni

La rete, se usata opportunamente, può almeno in parte integrare la consultazione di libri o riviste, data la vastità di risorse e di siti, di buon livello scientifico, presenti in rete. Esistono siti di matematica, ad esempio quelli citati, che sono ben curati e di livello almeno equivalente a molti dei libri di storia della matematica reperibili in una normale biblioteca scolastica, con la possibilità di prelevare diverso materiale su tutti i principali temi della matematica e della sua storia.
L'intervento dell'insegnante risulta comunque fondamentale e decisivo in tutte le fasi del lavoro, nella scelta dei siti e soprattutto per l'analisi e la selezione dei materiali. Gli allievi hanno bisogno di essere guidati per evitare la dispersione ed il sovraccarico di informazioni, a volte non pertinenti, che si possono trovare in rete. E' quindi importante che il docente - o un gruppo di docenti - abbia controllato la validità scientifica dei siti e abbia fatto uno studio preliminare di quelli più validi dal punto di vista didattico. Occorre infine un controllo puntuale dei tempi di lavoro in classe ed è quindi opportuno costruire delle mappe per la "visita guidata" dei siti da assegnare agli allievi in modo da sapere cosa cercare e quali materiali prelevare dalla rete, fermo restando che negli allievi si vuole sviluppare la capacità di utilizzare e organizzare i materiali recuperati dalla rete. Si riporta infine una bibliografia; i libri elencati sono di diverso tipo: alcuni sono delle vere e proprie fonti, altri sono divulgativi e altri ancora, per la loro impostazione didattica, adatti agli insegnanti.

Riferimenti bibliografici e altri materiali

- A. Aczel, *Il mistero dell'Aleph La ricerca dell'infinito tra matematica e misticismo*, Il Saggiatore, Milano 2002.
- Archimede, *Opere*, a cura di A. Frajese, UTET, Torino 1974.
- S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, edizione italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, Zanichelli, Bologna 1998 (si veda la voce *Infinito*).
- B. Bolzano, *I paradossi dell'infinito*, a cura di F. Voltaggio, Feltrinelli, Milano 1965.
- A. Deledicq, F. Casiro, *Apprivoisier l'infini*, ACL-Éditions, Paris 1997.
- W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica,* Zanichelli, Bologna 1992.
- M. Emmer, *L'infinito in un guscio di noce*, "L'Unità", 26 luglio 2002.
- Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino 1970.
- J. Guichard, *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*, Ellipses Editions, Paris 2000.
- S. Leonesi, C. Toffalori, "Il problema del continuo", in *Archimede*, n. 2/2003.
- L. Lombardo Radice, *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma 1981.
- E. Maor, *To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite*, Princeton University Press, 1991.
- P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1980.

Libri di testo per la scuola media superiore consultati

- L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 1°, 2°, 3°, Principato, Milano 1979.
- L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica Uno*, *Due e Tre,* Etas Libri, Milano 1996.
- W. Maraschini, M. Palma, *ForMat Spe. La formazione matematica per il triennio,* volumi 1°, 2° e 3°, Paravia, Torino 2000.