Sito POLYMATH: APPUNTI PER UNA LEZIONE (2003)

I numeri complessi: un percorso didattico tra algebra e geometria

Luigi Tomasi, L.S. "Galileo Galilei", Adria (RO) - SSIS Università di Ferrara

Sommario

Introduzione

Questi appunti per una lezione - o meglio per una serie di lezioni - nascono dall'esperienza di chi scrive e sono rivolti soprattutto ai colleghi che entrano ora nell'insegnamento o che ad esso si stanno preparando nelle SSIS – Scuole di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario. Anche se questa premessa potrebbe sembrare retorica, è con questo intento che vengono scritti questi appunti, sperando che possano trovare l'interesse di qualche collega, del quale si attendono eventualmente le osservazioni (che possono essere inviate all'indirizzo di posta elettronica che compare vicino al titolo).
Si tratta di appunti utilizzati in diversi anni di insegnamento di questo argomento in una classe quarta di liceo scientifico. Lo scrivente ritiene tuttavia che questo argomento possa essere presentato anche in classi terze che seguano programmi sperimentali di matematica. Di solito l'argomento viene presentato nella classe quarta liceo scientifico perché ha come prerequisito la conoscenza della trigonometria, ma negli istituti tecnici industriali questo argomento deve essere anticipato, perché il linguaggio dei numeri complessi viene usato continuamente in elettrotecnica (indicando di solito l'unità immaginaria con j invece che con i, per non confonderla con l'intensità di corrente).
Nel programma sperimentale del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica per i Licei Scientifici i numeri complessi vengono proposti nella classe quarta. L'argomento si inserisce nel Tema n. 2, "Insiemi numerici e strutture". Si cita in particolare "I numeri complessi e loro rappresentazione grafica; radici ennesime dell'unità". Nei commenti ai temi, per quanto riguarda questo argomento, nei programmi del PNI si dice:
"La trattazione dei numeri complessi si avvarrà anche dell'uso delle coordinate polari e sarà accompagnata da numerose e varie applicazioni; ad esempio le radici dell'unità potranno

essere collegate con il problema di inscrivere un poligono regolare di *n* lati in una circonferenza.”

Inizialmente si forniranno alla classe alcune informazioni di carattere storico mostrando anche delle applicazioni dei numeri complessi in matematica e in fisica. Indubbiamente per poter svolgere questo argomento occorre che gli studenti abbiano una adeguata conoscenza delle funzioni goniometriche e delle funzioni esponenziali e logaritmiche. I prerequisiti per un’efficace introduzione di questo argomento possono essere elencati come segue:

- Conoscere la struttura dell’insieme dei numeri reali R.
- Sapere scomporre in fattori un polinomio.
- Saper risolvere equazioni in R.
- Conoscere le operazioni con i radicali (semplici) e saperli utilizzare.
- Conoscere le funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche e le loro proprietà;
- Conoscere i vettori (modulo, somma, prodotto per uno scalare,…)

I prerequisiti per poter svolgere questo argomento sono piuttosto eterogenei e svolti in tempi molto diversi. Mentre le funzioni goniometriche sono state svolte poco tempo prima di svolgere i numeri complessi, ed è quindi lecito aspettarsi che la maggioranza della classe conosca questi argomenti, per altri (i numeri reali e le relative proprietà, la risoluzione di equazioni nel campo reale, argomenti che di solito vengono svolti nella classe seconda superiore) è naturale prevedere la necessità di un loro richiamo e ripasso.

Gli obiettivi specifici da perseguire con l’insegnamento dei numeri complessi possono essere così schematizzati:

- Conoscere la relazione tra vettori e numeri complessi.
- Saper riconoscere i numeri complessi, e in particolare l’unità immaginaria, come particolari “operatori” nel piano.
- Conoscere e saper rappresentare le operazioni fra numeri complessi.
- Sapere usare le diverse rappresentazioni dei numeri complessi e le relative proprietà.
- Sapere eseguire le operazioni con i numeri complessi.
- Sapere determinare la parte reale, la parte immaginaria e il coniugato di un numero complesso.
- Saper rappresentare un numero complesso in forma algebrica, trigonometria ed esponenziale.
- Sapere rappresentare un numero complesso in modo vettoriale.
- Saper passare da una rappresentazione di un numero complesso all’altra.
- Saper applicare la formula di De Moivre per la potenza di un numero complesso.
- Saper calcolare le radici *n*-esime di un numero complesso.
- Saper risolvere semplici equazioni algebriche nell’insieme dei numeri complessi.
- Sapere usare i numeri complessi in Fisica.

Lo svolgimento in classe di questo argomento può essere suddiviso nelle seguenti unità didattiche:

unità didattica 1: Introduzione all’insieme C.
unità didattica 2: Rappresentazioni di un numero complesso
unità didattica 3: Equazioni in C.
unità didattica 4: Applicazioni.

I contenuti verranno presentati in classe utilizzando la rappresentazione grafica dei numeri complessi, strumenti di calcolo come le calcolatrici grafico-simbolico oltre a software di geometria dinamica come *Cabri Géomètre* e di manipolazione simbolica come *Derive*. Con questi strumenti si intende rendere più vivace e stimolante l’apprendimento di un nuovo argomenti per gli studenti. Mediante la visualizzazione dei concetti, l’uso delle tecnologie permette un apprendimento più motivante e rafforza negli allievi l’esperienza concreta su questi “oggetti matematici”, permettendo in seguito di consolidare una conoscenza più approfondita del significato di questi nuovi numeri. L’utilizzo del software è motivato inoltre dalla necessità che gli allievi affrontino in modo personale ed attivo le varie fasi di studio in attività di laboratorio.

Perché i numeri complessi? Breve storia dei numeri complessi

La risoluzione di equazioni è una parte fondamentale della matematica anche dal punto di vista storico. Questo tema si trova affrontato già nelle tavolette di argilla dei Babilonesi. Qui non c'è il tempo per ripercorrere neppure sinteticamente la storia dell'algebra. Ci limitiamo a sintetizzare alcuni punti della nascita dell'algebra classica che si può collocare nel XVI secolo. Nel secolo XVI si ha un affinamento delle procedure di calcolo e si ricercano notazioni che non siano più legate alle figure geometriche.
All'inizio del Cinquecento in Italia il Rinascimento è in pieno sviluppo e anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee. È da ricordare a questo proposito la notevole concentrazione di eminenti matematici italiani e stranieri nell'Università di Bologna, dove, a breve distanza di tempo, insegnarono Luca Pacioli, Scipione Dal Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e numerosi altri. La fama di tali maestri attirava centinaia di allievi da oltralpe, tra i quali Albrecht Dürer che perfezionò i suoi studi di prospettiva sotto la guida di Scipione Dal Ferro.
La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo di "completamento del quadrato" era nota sin dai tempi dei Babilonesi. In Euclide queste equazioni si trovano risolte sotto forma geometrica (nel libro II degli *Elementi*).
L'equazione cubica, se si eccettuano dei casi particolari, aveva fino ad allora sfidato i matematici tanto che, ancora nel 1494, Luca Pacioli (1445-1514) aveva sostenuto che la soluzione dell'equazione cubica generale era impossibile. Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati solo a risolvere dei casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.
Scipione Dal Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riuscì a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1500; egli però non pubblicò il suo metodo risolutivo in quanto in tale periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema.

Nicolò Tartaglia (1500-1559)

Tale metodo fu rivelato dallo stesso Scipione Dal Ferro, alla fine della sua vita, ad un suo allievo, Antonio Maria Fior. Anche Tartaglia (soprannome di Nicolò Fontana, 1500?-1559), sembra in modo indipendente, aveva trovato un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p ed q positivi. Nel 1535 fu quindi organizzata una sfida matematica tra Fior e Tartaglia. Ognuno dei contendenti proposte 30 problemi che l'avversario doveva risolvere. Tartaglia risolse tutti i trenta problemi proposti da Fior, mentre Fior non riuscì a risolvere nemmeno uno dei trenta posti da Tartaglia. La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunse Girolamo Cardano (1501-1576). Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finì per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Nonostante questo impegno Cardano pubblicò la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nella sua opera *Ars Magna* (Norimberga 1545). Lo stile di Cardano è piuttosto oscuro e la sua algebra è ancora allo stato retorico, in cui le equazioni vengono espresse quasi completamente a parole. Tuttavia, scrivendo con il linguaggio di oggi, la soluzione che Cardano fornisce dell'equazione cubica del tipo $x^3 + px = q$, si ottiene la formula seguente:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

e inoltre quella dell'equazione cubica del tipo $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

La procedura risolutiva dell'equazione $x^3 + px = q$ si ritrova descritta nelle celebri terzine di Tartaglia (a destra si riporta la scrittura algebrica attuale):

"*Quando che'l cubo con le cose appresso*	$x^3 + px = q$ *con p, q* > 0
Se agguaglia à qualche numero discreto	
Trovan dui altri differenti in esso.	$q = u - v$
Da poi terrai questo per consueto	
Che 'l lor produtto sempre sia uguale	$uv = (p/3)^3$
Al terzo cubo delle cose neto,	
El residuo poi suo generale	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
Delli lor lati cubi ben sottratti	
Varrà la tua cosa principale."	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Sulla contesa tra Cardano e Tartaglia per la priorità del procedimento si è scritto molto; tuttavia è stato stabilito che il primo a trovare il metodo risolutivo per le equazioni di terzo grado è stato Scipione Dal Ferro nel 1515. In effetti Dal Ferro fu indicato proprio da Cardano nella prima pagina dell'*Ars Magna* come uno degli autori della scoperta.

La formula risolutiva delle equazioni di quarto grado fu scoperta da Ludovico Ferrari (1522-1565). Anche queste formule furono pubblicate nell'*Ars Magna* e Cardano attribuisce a Ferrari il metodo.
Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, fu Rafael Bombelli (1526-1573), matematico bolognese (nato a Borgo Panigale). Bombelli, nella sua opera *L'Algebra*, il cui titolo completo è *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (composta verso il 1560, ma stampata in parte solo nel 1572) raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico della prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose cioè di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile*, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$.
Nell'*Algebra*, Bombelli si occupò del calcolo con potenze e con radici e di equazioni algebriche. A lui si deve inoltre l'introduzione degli esponenti per indicare le potenze dell'incognita.
Nel libro I dell'*Algebra* Bombelli prende in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama "*quantità silvestri*", e giunge ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Bombelli introdusse i termini *più di meno* e *meno di meno*, per indicare $+\,i$ e $-\,i$, che abbrevia nelle scritture *pdm* e *mdm*; ad esempio, con:

$$R\ c \lfloor 2\ pdm\ 11 \rceil$$

egli rappresentò il numero complesso: $\sqrt[3]{2+11i}$.
Stabilì inoltre le regole seguenti:

$$(\pm 1)\times i=\pm i \qquad (\pm 1)\times(-i)=\mp i$$

$$(+i)\times(+i)=-1 \qquad (+i)\times(-i)=+1$$

$$(-i)\times(+i)=+1 \qquad (-i)\times(-i)=-1$$

Nel linguaggio di Bombelli, queste regole si esprimono nel seguente modo:

Più via più di meno, fa più di meno.	$(+1)\times(+i)=+i$
Meno via più di meno, fa meno di meno.	$(-1)\times(+i)=-i$
Più via meno di meno, fa meno di meno.	$(+1)\times(-i)=-i$
Meno via meno di meno, fa più di meno.	$(-1)\times(-i)=+i$
Più di meno via più di meno, fa meno.	$(+i)\times(+i)=-1$
Più di meno via men di meno, fa più.	$(+i)\times(-i)=+1$
Meno di meno via più di meno, fa più.	$(-i)\times(+i)=+1$
Meno di meno via men di meno, fa meno.	$(-i)\times(-i)=-1$

Bombelli, dunque, stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati *immaginari* da Cartesio per indicare delle soluzioni considerate fittizie e irreali, né vere né "surde" (negative).
Nell'*Algebra* troviamo la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, Dal Ferro e Tartaglia, portano a radicali doppi coinvolgenti quantità non reali. Ad esempio, viene data la soluzione dell'equazione $x^3=15x+4$ tramite la formula "di Cardano":

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}.$$

Si ottiene la somma di due radicali doppi, con radicando negativo, mentre già si sapeva, per sostituzione diretta, che $x = 4$ era l'unica radice positiva dell'equazione.
Bombelli provò che si può scrivere: $(i \pm 2)^3 = 11i \pm 2$ e quindi si poteva concludere trovando la soluzione nota:

$$x = \sqrt[3]{11i + 2} - \sqrt[3]{11i - 2} = i + 2 - (i - 2) = 4 .$$


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Frontespizio de *L'Algebra* di R.Bombelli

A Bombelli spetta quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non avevano sviluppato una teoria completa.
Dopo Tartaglia e Cardano per quasi due secoli si studiarono le equazioni di 5° grado e di grado superiore, ma tutti i vari tentativi fatti per risolverle in modo analogo a quelle di 2°, 3° e 4° grado non portarono ad alcun risultato. Nel 1799, nella sua tesi di laurea, Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) dette una prima dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*

Ogni equazione algebrica di grado n ha almeno una radice nel campo complesso, sia che i coefficienti siano reali o complessi.

Carl F. Gauss (ritratto nel 1803)

Partendo da questo risultato (e utilizzando il teorema di Ruffini) si dimostra che ogni polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi si scompone in un prodotto di n fattori alcuni dei quali sono eventualmente ripetuti:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot ....(z-\alpha_n).$$

Tuttavia, dopo i lavori di Gauss, rimaneva ancora aperta la questione se era possibile risolvere "per radicali" le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. La risposta venne data da Paolo Ruffini (1765-1822) e da Niels H. Abel (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica (detto di Ruffini-Abel): per $n > 4$ non si può fornire, in generale, una formula risolutiva per radicali delle equazioni algebriche.
Nel Settecento, soprattutto con Eulero, e nell'Ottocento si ha un grande sviluppo dell'analisi complessa e delle sue applicazioni alla fisica e all'ingegneria.
Sebbene i numeri complessi siano stati originariamente introdotti per risolvere le equazioni algebriche di 3° grado, essi sono stati poi ampiamente utilizzati nelle applicazioni, in particolare in fisica e in ingegneria. Un ingegnere elettrotecnico americano di origine tedesca, Charles P. Steinmetz (1865-1923), alla fine dell'Ottocento sviluppò la teoria delle correnti alternate basandosi sui numeri complessi (metodo dei "fasori"). Su Steinmetz è stato detto che "ha prodotto elettricità tramite i numeri complessi".

Introduzione ai numeri complessi

Nella premessa storica si è accennato al motivo per cui Cartesio ha chiamato questi numeri "immaginari". Inoltre si comprende anche perché, nell'Ottocento, gli altri numeri sono stati chiamati "reali". Storicamente, quindi, prima è nato il termine "numeri immaginari" e poi, più di due secoli dopo, quello di "numeri reali". Nell'insegnamento, tuttavia, lo studio almeno intuitivo dei numeri reali precede quello dei numeri complessi.
Chiediamoci quindi: perché ampliare i numeri reali?
Come sappiamo, l'insieme dei numeri reali R, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione possiede una serie di proprietà che lo rendono un campo, cioè un corpo commutativo; è inoltre dotato di una relazione d'ordine che è compatibile con tale struttura algebrica ed è continuo.
Tutte queste proprietà permettono di affrontare e risolvere in R una vastissima classe di problemi che occupa tutta la scuola superiore e oltre.
Eppure, nonostante questa grande ricchezza della struttura algebrica (oltre a quella d'ordine e topologica) l'insieme R può rivelarsi "insufficiente" in alcuni problemi particolari: per esempio, le equazioni:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$e^x + 1 = 0$$

non ammettono alcuna soluzione in R.
Appare quindi logico tentare un "ampliamento algebrico" di R, in modo da ottenere, se possibile, un insieme in cui alcuni di questi problemi possano essere risolti; questo insieme esiste e si indica con C. Comunque, anche storicamente la motivazione essenziale per la introduzione dei numeri complessi è stata la risoluzione delle equazioni di 3° grado.

Rappresentazione algebrica dei numeri complessi

La più semplice rappresentazione di un numero complesso è quella algebrica: $z = x + iy$. I due numeri reali x e y sono rispettivamente detti *parte reale* e *coefficiente della parte immaginaria* del numero complesso considerato. Il prodotto iy è detto *parte immaginaria* di $x + iy$; talvolta si indica direttamente il numero reale y come *parte immaginaria* di $x + iy$.

Più formalmente, un numero complesso dovrebbe essere definito come una coppia ordinata di numeri reali (x, y). Con tale scrittura, più astratta, occorre dare la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi e introdurre l'unità immaginaria *i*, identificandola con la coppia (0,1).
E' utile definire a questo punto anche il numero complesso coniugato di un numero $z = a + ib$ come quel numero, indicato con $\overline{z}$, come quel numero complesso che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta: $\overline{z} = a - ib$.
Si definiscono poi le operazioni di addizione e moltiplicazione. Si riportano sinteticamente queste definizioni e le proprietà.

Addizione (legge di composizione interna a C)**:**
$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro ($0+i0$) che si può indicare con il simbolo 0.
- Ogni elemento $z = a + ib$ ammette in C un "simmetrico" rispetto all'addizione ($-z = -a - ib$) che si chiama *opposto* di $a + ib$.

Moltiplicazione (legge di composizione interna a C)**:**
$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro ($1+i0$) che si può indicare con il simbolo 1.
- Ogni elemento $z = a + ib$, con *a* e *b* non contemporaneamente nulli, ammette in C un "simmetrico" rispetto alla moltiplicazione, che si chiama reciproco di $a + ib$, dato da
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

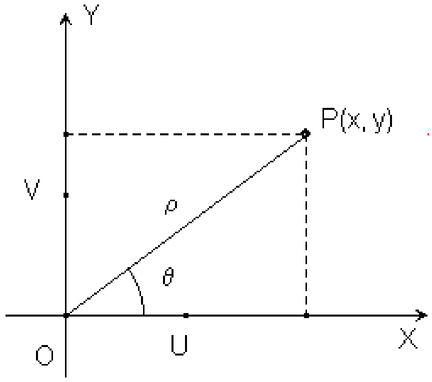
Tra addizione e moltiplicazione esiste una "regola di convivenza", ovvero la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*:
$$(u+v)\cdot z = u\cdot z + v\cdot z.$$
Con queste operazioni e proprietà l'insieme C si dice essere un *campo*.
La sottrazione in C è introdotta grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso, ma si tratterà di un'operazione poco interessante; la vera operazione è l'addizione. Analogo discorso per la divisione in C. La divisione in C è introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso (non nullo). La scrittura $\frac{a+ib}{c+id}$ (con *c* e *d* non entrambi nulli) indicherà il seguente prodotto: $\left(a+ib\right)\cdot\frac{1}{c+id}$.

Analogie e differenze tra R e C
Con le operazioni di addizione e moltiplicazione R **e C** sono entrambi campi, con le stesse proprietà elencate in precedenza, ma
in C non è possibile definire alcuna relazione di ordine tale che sia compatibile con la struttura algebrica di C.
Se esistesse una relazione d'ordine in C compatibile con la sua struttura algebrica, si avrebbe, per ogni paio di elementi *a*, *b*:
$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b>0 \\ a\cdot b>0 \end{cases}$$

Se esistesse una tale relazione d'ordine in C, che verifichi le due proprietà precedenti si potrebbe ricavare una contraddizione.
La rappresentazione algebrica dei numeri complessi permette anche di definire la potenza di un numero complesso, ma si rivela subito scomoda per questa operazione e ancor di più se si vuole affrontare il problema di trovare le radici di un numero complesso.

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi x e y, e un numero complesso $z = x + iy$, i numeri reali x e y si possono interpretare come coordinate cartesiane del punto P, detto "affissa" o "indice" di z rispetto alle rette OU e OV.



Si osserva che $z = \overrightarrow{OP} = x + iy$. Il piano ottenuto si chiama di Argand-Gauss o piano di Gauss.
Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi.
L'asse delle ascisse viene anche chiamato asse reale e quello delle ordinate asse immaginario.
Dal punto di vista geometrico il modulo $|z|$ di un numero complesso rappresenta la distanza del punto z dall'origine. Il valore assoluto della differenza tra due numeri complessi $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza dei punti che rappresentano i numeri z_1 e z_2. Se $z = x + iy$, definiamo numero complesso coniugato di z il numero $\overline{z} = x - iy$. Geometricamente il punto $\overline{z}$ non è altro che il simmetrico di z rispetto all'asse delle x.
Con l'uso della rappresentazione geometrica dei numeri complessi è possibile proporre molti esercizi e problemi che collegano la geometria con i numeri complessi.

Esercizio. I vertici A, B e C di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$ e $z_3 = 1 + 6i$. Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele e determinare il perimetro e l'area.

Esercizio. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti equazioni e disequazioni:
(a) $|z| = 2$ (b) $|z - i| = 1$ (c) $|z - 2| + |z + 2| = 6$ (d) $|z| \leq 1$ (e) $|z - 1| \geq 3$.

Esercizio. Disegnare le figure del piano rappresentate dalle seguenti equazioni:
(a) $z \cdot \overline{z} = 9$ (b) $z + \overline{z} = 6$ (c) $\overline{z} = z + 6i$.

Rappresentazione trigonometria (o polare) dei numeri complessi

Le osservazioni precedenti permettono di scrivere il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \overrightarrow{OP} = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, si chiama *modulo* del numero complesso z e l'angolo θ si chiama anomalia o *argomento* del numero complesso. Quindi si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Il modulo ρ è la distanza tra il punto P e l'origine degli assi e l'anomalia θ è l'angolo formato tra il segmento OP e l'asse delle ascisse. Mentre il numero ρ è univocamente determinato, l'argomento θ è determinato a meno di un multiplo (intero) di 2π.
La moltiplicazione di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica diventa particolarmente significativa.

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

che fornisce:

$$z = \rho_1\rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Quindi i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.
Analogamente, il risultato della divisione tra due numeri complessi ($z_2 \neq 0$) espressi in forma trigonometrica, sarà:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

Dopo alcuni calcoli si ottiene:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

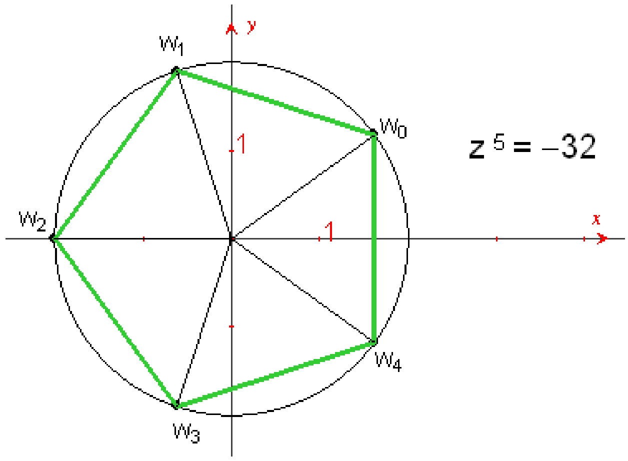
Si deve fare dunque il quoziente tra i moduli e la sottrazione tra gli argomenti. Quindi i moduli hanno una struttura moltiplicativa e gli argomenti una struttura additiva.
Possiamo ora, sfruttando la formula della moltiplicazione, dimostrare per induzione la formula per calcolare la potenza con esponente intero di un numero complesso, detta formula di De Moivre (Abraham De Moivre, 1667-1754). Se $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, la potenza è data da

$$w = z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Quest'ultima formula permette di determinare la potenza di un numero complesso in modo più facile rispetto al calcolo della potenza in forma algebrica (in tale caso occorre far uso del triangolo di Tartaglia). Utilizzando la formula di De Moivre si può dimostrare che ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale *n,* esistono *n* radici *n*-esime di *z,* ovvero esistono *n* numeri complessi w tali che $w^n = z$. Se $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, allora si dimostra che le radici *n*-esime di z sono date dalla formula seguente:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

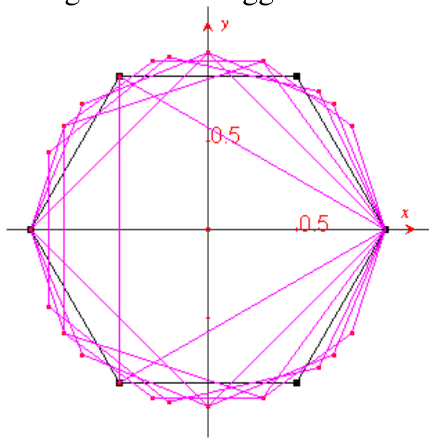
Se rappresentiamo tali radici nel piano complesso si ottengono i vertici di un poligono regolare di *n* lati inscritto in una circonferenza di centro l'origine degli assi O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.
Ad esempio le radici quinte del numero −32 sono rappresentate nei vertici del pentagono regolare nella figura seguente.



Quindi possiamo concludere che:
ogni numero complesso $z \neq 0$ *ammette n radici n-esime distinte.*
Nel caso particolare in cui z=1, si ottengono le radici n-esime dell'unità:

$$\varepsilon_{k,n} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esse hanno tutte modulo 1 e argomento che è un multiplo di $2\pi / n$ e le loro immagini nel piano di Argand-Gauss sono date dai vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine degli assi e di raggio 1.



Una delle radici è sempre 1; tutte le altre si ottengono da una potenza della radice (ottenuta per $k = 1$):

$$\varepsilon_{1,n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Le usuali regole per il calcolo dei radicali devono essere riviste nel campo complesso. Ad esempio vale la seguente regola $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$, ma non vale nell'ordine inverso; si può soltanto scrivere in senso insiemistico: $z \in \left\{\sqrt[n]{z^n}\right\}$.

Esempio. Si consideri il numero complesso $z = 1 - i$. Calcoliamo la potenza quinta di z: numero:

$$z^5 = (1-i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^5 = -4 + 4i.$$

Se ora estraiamo la radice quinta di questo numero, otteniamo:

$$\sqrt[5]{z^5} = \sqrt[5]{-4+4i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right] \neq z\,.$$

Analogamente, le formule:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{z}} = \sqrt[mn]{z}$

$\sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{uz}$

non sono più valide, ma occorre interpretarle nel senso della teoria degli insiemi:

$\left\{\sqrt[n]{\sqrt[m]{z}}\right\} = \left\{\sqrt[mn]{z}\right\}$

$\left\{\sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{z}\right\} = \left\{\sqrt[n]{uz}\right\}$.

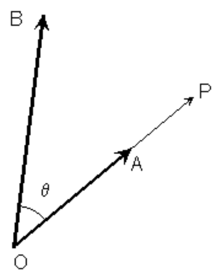
Ad esempio, nell'ultima formula scritta, l'insieme al primo membro coincide con quello al secondo membro. Analogamente risulta impossibile usare la notazione di radice come potenza con esponente frazionario. Le "difficoltà" precedenti, che differenziano il campo complesso da quello reale, nascono tutte dal fatto che esistono *n* radici *n*-esime di un numero complesso.

Rappresentazione vettoriale dei numeri complessi

Un altro modo di rappresentare i numeri complessi, che può essere proposto nella scuola secondaria superiore, è quello vettoriale. Ci si restringe alla considerazione di vettori applicati nell'origine. Si fissa poi nel piano l'usuale verso antiorario come verso positivo delle rotazioni. Si fissa anche un vettore unitario di riferimento. Possiamo chiamare *piano complesso* un piano in cui sono fissati:

1) un punto origine O;
2) un vettore non nullo $\overrightarrow{OV}$ (vettore unitario);
3) il verso positivo delle rotazioni attorno al punto O (origine).

Se si moltiplica un qualunque vettore $\overrightarrow{OA}$ per un numero reale non negativo ρ, e si ruota il vettore $\overrightarrow{OP}$ ottenuto attorno all'origine *O* di un angolo orientato θ (in radianti), si ottiene il vettore $\overrightarrow{OB}$.



Possiamo quindi identificare un numero complesso di modulo ρ e argomento θ con un operatore che ad ogni vettore $\overrightarrow{OA}$ del piano associa il vettore $\overrightarrow{OB}$ ottenuto nel modo detto. Un numero complesso *z* è dunque un operatore nel piano complesso che ad ogni vettore $\overrightarrow{OA}$ fa corrispondere un vettore $\overrightarrow{OB}$:

$$z:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z:\ \overrightarrow{OA} \longrightarrow \overrightarrow{OB}$$

Possiamo scrivere che $\overrightarrow{OB} = z \cdot \overrightarrow{OA}$.

Un numero complesso è quindi costituito da una coppia di elementi:

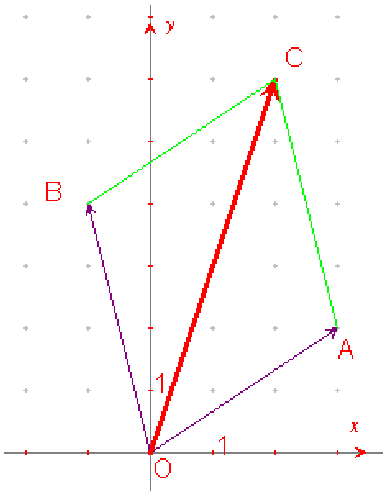
- il primo elemento è un numero reale non negativo ρ che indica la "dilatazione" (o "contrazione") del modulo del vettore a cui è applicato *z*,

- il secondo è un numero reale qualunque θ che indica il verso e la misura (in radianti) della rotazione che il vettore iniziale deve effettuare attorno all'origine degli assi.

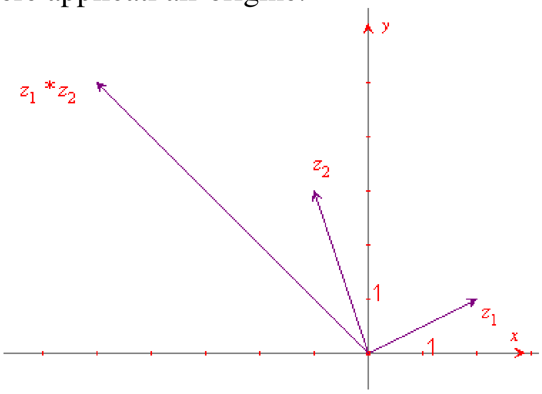
Questa definizione identifica un numero complesso una *roto-omotetia*, ovvero con la composizione di una omotetia di rapporto ρ e centro *O* (origine degli assi) con una rotazione attorno all'origine ed è del tutto equivalente alla definizione trigonometrica di un numero complesso.

In coerenza con quanto detto in precedenza, due numeri complessi si diranno uguali se hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π. In questa interpretazione, il modulo di un numero complesso è la lunghezza del vettore $\overrightarrow{OP}$ che rappresenta il numero complesso z.

Si può ora procedere definendo la somma di due numeri complessi, il prodotto, la potenza e il quoziente. L'addizione, in particolare, coincide con la "regola del parallelogramma" per determinare la somma di due vettori.



Per il prodotto si ottiene la regola già vista in precedenza: il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli e l'argomento è uguale alla somma degli argomenti. Si noti però che i vettori devono sempre essere applicati all'origine.



In questa rappresentazione è particolarmente interessante il ruolo dell'unità immaginaria *i*, che può essere interpretata come una rotazione in senso antiorario di un angolo retto attorno all'origine.

Questa interpretazione dei numeri complessi stabilisce un legame molto interessante tra numeri complessi e le trasformazioni geometriche del piano ed ha molte utilizzazioni in fisica, in particolare in elettrotecnica nell'analisi dei circuiti elettrici in corrente alternata.

Si noti che vi è un limite alla rappresentazione vettoriale dei numeri complessi come vettori applicati nell'origine. Mentre l'addizione ha una perfetta analogia con la somma di vettori (applicati in O), la moltiplicazione non possiede analogie con il prodotto scalare e il prodotto vettoriale. La moltiplicazione di numeri complessi è un'operazione che restituisce un numero complesso; è quindi un'operazione che si chiama "interna" in quanto si ottiene un elemento che è un numero complesso. Nell'insieme dei vettori è invece definito il prodotto scalare, che non è un'operazione interna: il prodotto di due vettori è uno scalare e non un vettore. Nell'insieme dei vettori del piano è anche definito il prodotto vettoriale di due vettori, che è un vettore, ma tale vettore non appartiene al piano.

La forma esponenziale dei numeri complessi

Questo tipo di rappresentazione è una delle più interessanti dal punto di vista applicativo, ma non semplice da introdurre nella scuola secondaria superiore. In questa rappresentazione si sfruttano le proprietà della funzione esponenziale per rendere più facili i calcoli con i numeri complessi.
La rappresentazione è basata sulla seguente definizione (ricavata dallo sviluppo in serie delle funzioni seno e coseno) valida per un numero complesso di modulo unitario:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

Generalizzando si definisce:

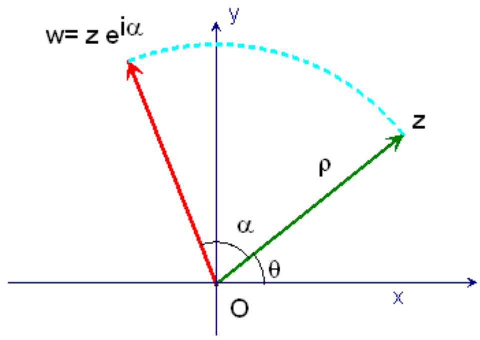
$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Queste idee e notazioni sono state introdotte da Eulero (1707-1783). Si possono ricordare inoltre le formule di Eulero:
$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, che introducono un legame inaspettato tra le funzioni trigonometriche e quelle esponenziali nel campo complesso. In questo contesto è opportuno ricordare una delle più celebri equazioni della matematica, trovata anch'essa da Eulero, che stabilisce una relazione tra le cinque più importanti costanti della matematica (0, 1, π, e, i):

$$e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

Leonhard Euler (1707-1783)

Dato un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, possiamo dare una interpretazione geometrica al prodotto $ze^{i\alpha}$. Si ottiene: $ze^{i\alpha} = \rho e^{i\theta}e^{i\alpha} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$. La figura seguente suggerisce che tale moltiplicazione determina una rotazione del vettore $\overrightarrow{OA}$ che rappresenta il numero z, di un angolo α in senso antiorario (se α>0).



Si può dunque pensare al numero complesso $e^{i\theta}$ come un *operatore* che determina una rotazione attorno all'origine di un angolo α. Questo significato della moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario è particolarmente utile in tutte le applicazioni dei numeri complessi. Con questa interpretazione dei numeri complessi è facile allora spiegare l'equazione $e^{i\pi}+1=0$. Il numero complesso $e^{i\pi}=-1$ perché rappresenta la rotazione del vettore 1 di un angolo π. Si ottiene dunque il numero complesso −1.

Risoluzione di equazioni algebriche nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra

Il calcolo delle radici in C di un'equazione algebrica consente di risolvere in modo completo le equazioni di secondo grado anche nel caso in cui il discriminante sia negativo ($\Delta<0$). In classe si può presentare, come approfondimento storico, la risoluzione delle equazioni polinomiali di terzo grado almeno a coefficienti reali.
Si può anche accennare in classe agli sviluppi successivi agli algebristi italiani del Cinquecento, ricordando il "teorema fondamentale dell'algebra" di Gauss, e i risultati di Ruffini e di Abel sulla risolubilità per radicali fino ad un accenno a Galois che conclude la storia dell'algebra classica e apre la strada all'algebra moderna.
Possiamo riprendere l'equazione $z^2=\alpha$, dove α è un numero reale. Si devono distinguere due casi; nel primo $\alpha\geq 0$ porta a determinare due soluzioni reali ($z=\pm\sqrt{\alpha}$), il secondo in cui $\alpha<0$, che conduce a due soluzioni complesse coniugate, dette immaginarie ($z=\pm i\sqrt{\alpha}$).
Quando invece si deve risolvere la generica equazione di secondo grado $az^2+bz+c=0$, con $a,b,c\in\mathrm{R}$, si può seguire, una volta raccolto il coefficiente *a*, il "metodo del completamento del quadrato", che fornisce le soluzioni con operazioni elementari sulle variabili e sui coefficienti reali:

$$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Posto $w^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, si hanno due casi:

$\Delta=b^2-4ac\geq 0$, allora $w=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Delta=b^2-4ac<0$, allora $w=\pm\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Si ottiene quindi:

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{se } \Delta=b^2-4ac\geq 0$$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad \text{se } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Si osserva che se i coefficienti dell'equazione di partenza sono reali e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora le soluzioni sono complesse coniugate.
Nel caso in cui l'equazione di partenza sia a coefficienti complessi, allora per risolvere l'equazione di secondo grado si risolve il sistema ottenuto uguagliando separatamente le parti reali dell'equazione e le parti immaginarie tra loro.

Esercizio. Risolvere l'equazione:

$$4z^2 - 2(1+i)z + i = 0.$$

Si pone $z = x + iy$, si calcola z^2 e si separano le parti reali da quelle immaginarie.

Consideriamo ora la generica equazione di terzo grado a coefficienti reali:

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0.$$

Consideriamo la trasformazione $z = x - \frac{a_1}{3a_0}$. In questo modo l'equazione si riduce alla forma semplificata

$$x^3 + px + q = 0.$$

Seguendo l'idea di Tartaglia, poniamo

$$x = u + v.$$

Si ottiene $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Sostituendo in $x^3 + px + q = 0$, si ottiene

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0.$$

Se poniamo $\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases}$, si ottiene il sistema simmetrico $\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$.

Risolvendo questo sistema simmetrico, tramite l'equazione risolvente:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

si ottengono tre coppie di valori di *u* e di *v*.
Quindi si ottengono i valori di tre soluzioni per *x* (almeno una radice è sempre reale e le altre due possono essere reali o complesse coniugate) e di conseguenza per *z*..

In un modo analogo si procede per la risoluzione delle equazioni algebriche di quarto grado e si può dimostrare che ci sono 4 soluzioni complesse.
In generale vale il seguente teorema:
Teorema fondamentale dell'algebra (generalizzazione)
Dato un polinomio di grado *n*
$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, con $a_0 \neq 0$, avente coefficienti appartenenti a C, esso ha *n* radici in C, ciascuna contata con la dovuta molteplicità.

Esercizio. Risolvere l'equazione $z^3 + 27 = 0$ e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio. Determinare tutte le radici complesse dell'equazione $z^4 + z^2 + 1 = 0$ e rappresentarle nel piano complesso.

Esercizio. Calcolare le radici nel campo complesso della seguente equazione:

$$z^6 + i = 0.$$

Rappresentare nel piano complesso le soluzioni. Trovare l'area e il perimetro del poligono ottenuto ed il raggio della circonferenza circoscritta.

Uso del software nello studio dei numeri complessi

Tutti i temi esposti in precedenza possono essere presentati in classe con l'uso di un software di geometria dinamica, come *Cabri Géomètre*, oppure con un software di manipolazione simbolica come *Derive*.

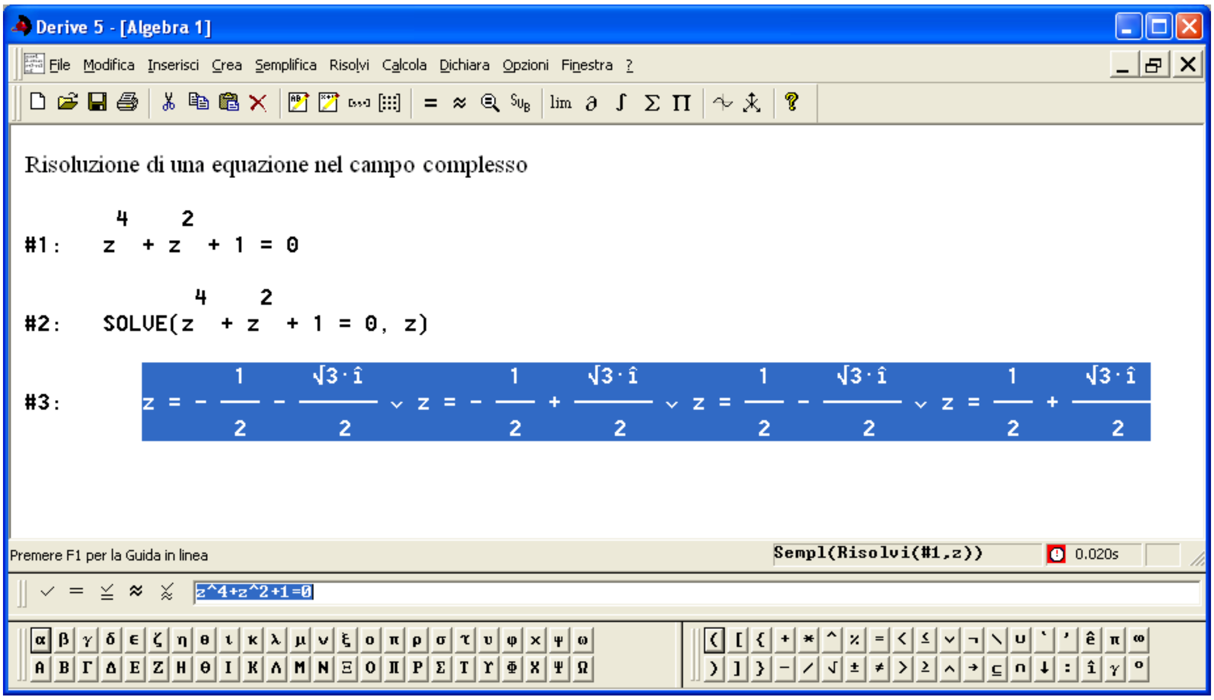
Con *Cabri Géomètre*, usando lo "strumento" vettore presente nel software e identificando un numero complesso con un vettore applicato nell'origine, è possibile visualizzare molti dei concetti esposti in precedenza. In particolare è possibile costruire delle macro di *Cabri* per costruire il prodotto di un numero complesso per uno scalare, per visualizzare il prodotto di numeri complessi, la potenza *n*-esima di un numero complesso e le radici *n*-esime. Tali macro possono essere eventualmente inserite in un menu personalizzato - creato dall'insegnante - di *Cabri* che può essere usato nello studio dei numeri complessi.

Il software che maggiormente si presta, nella scuola secondaria superiore, per lo studio dei numeri complessi, è *Derive.* Questo software, come tanti altri sistemi di "computer algebra" (come ad esempio *Matematica, Maple,…*) possiede già tutte le funzioni predefinite sui numeri complessi e permette facilmente all'insegnante di presentare in classe questo argomento e agli studenti di esercitarsi, con indubbi vantaggi sul piano dell'apprendimento.
Tutti i sistemi di "computer algebra" citati , e le calcolatrici simbolico grafiche, sono stati programmati in modo da utilizzare "spontaneamente" il campo complesso piuttosto che il campo reale. E' quindi particolarmente facile eseguire, con questi sistemi, le operazioni con i numeri complessi e risolvere equazioni nel campo complesso, ottenendo le soluzioni simboliche delle equazioni algebriche di secondo, terzo e quarto grado.
Le funzioni riguardanti i numeri complessi presenti in *Derive* sono le seguenti:

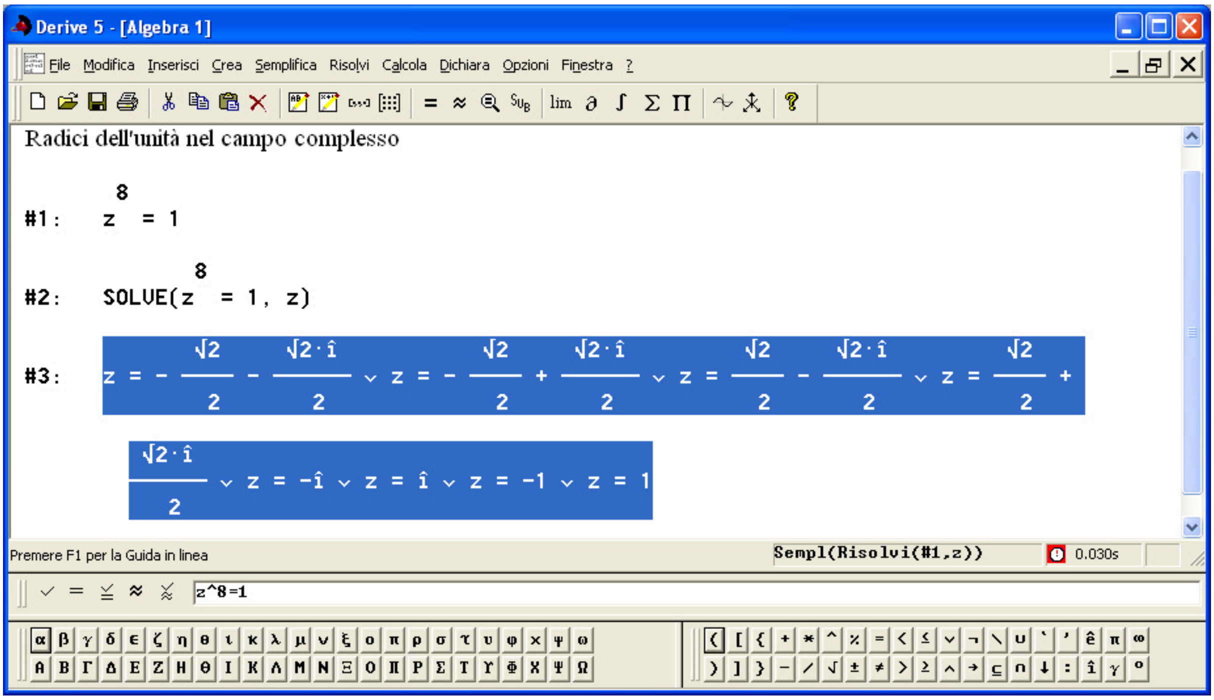
RE(z)	è la funzione *parte reale* di un numero complesso; . Se x e y sono reali, $\mathrm{RE}(x+iy)$ ritorna x. Ad esempio RE($2-3i$)=2. RE(z) ha come dominio il campo complesso e come codominio il campo reale;
IM(z)	è la funzione *parte immaginaria* di un numero complesso; Se x e y sono reali, $\mathrm{IM}(x+iy)$ ritorna *y*. Ad esempio IM($2-3i$)$=-3$. IM(z) restituisce un numero reale.
ABS(z)	Indica il modulo di un numero complesso z. ritorna il valore assoluto (detto anche ampiezza o modulo) di z. Il valore assoluto di z è la distanza tra z e l'origine del piano complesso. Un valore assoluto può essere inserito mediante due barre verticali che delimitano l'argomento. Se x e y sono reali, $\lvert x + i\cdot y\rvert$ si semplifica in $\sqrt{x^2 + y^2}$.
PHASE(Z)	Restituisce l'argomento, misurato dal semiasse positivo delle *x* in verso antiorario e con la limitazione all'intervallo $\left]-\pi,\pi\right]$, di un numero complesso z.
CONJ(z)	Restituisce il coniugato di un numero complesso z. Se x e y sono reali, $\mathrm{CONJ}(x+iy)$ ritorna $x-iy$.
Unit_circle	circle rappresenta un generico punto nel cerchio unitario nel piano complesso. Ad esempio, 1, -1, *i* e $-i$ sono punti nel cerchio unitario. unit_circle è di aiuto nella risoluzione di equazioni. Ad esempio, se z è stato dichiarato complesso, risolvendo l'equazione $\lvert z\rvert = 2$ secondo z, si ottiene z = 2·unit_circle.
SIGN(z)	SIGN(z) ritorna il punto del cerchio unitario nel piano complesso che ha lo

	stesso angolo di fase di z. Ad esempio, SIGN(3 + 4·i) si semplifica in $\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}$.

Per risolvere un'equazione nel campo complesso, si usa la funzione *Risolvi*. Supponiamo ad esempio di voler risolvere l'equazione $z^4+z^2+1=0$. Si ottiene quanto indicato di seguito.



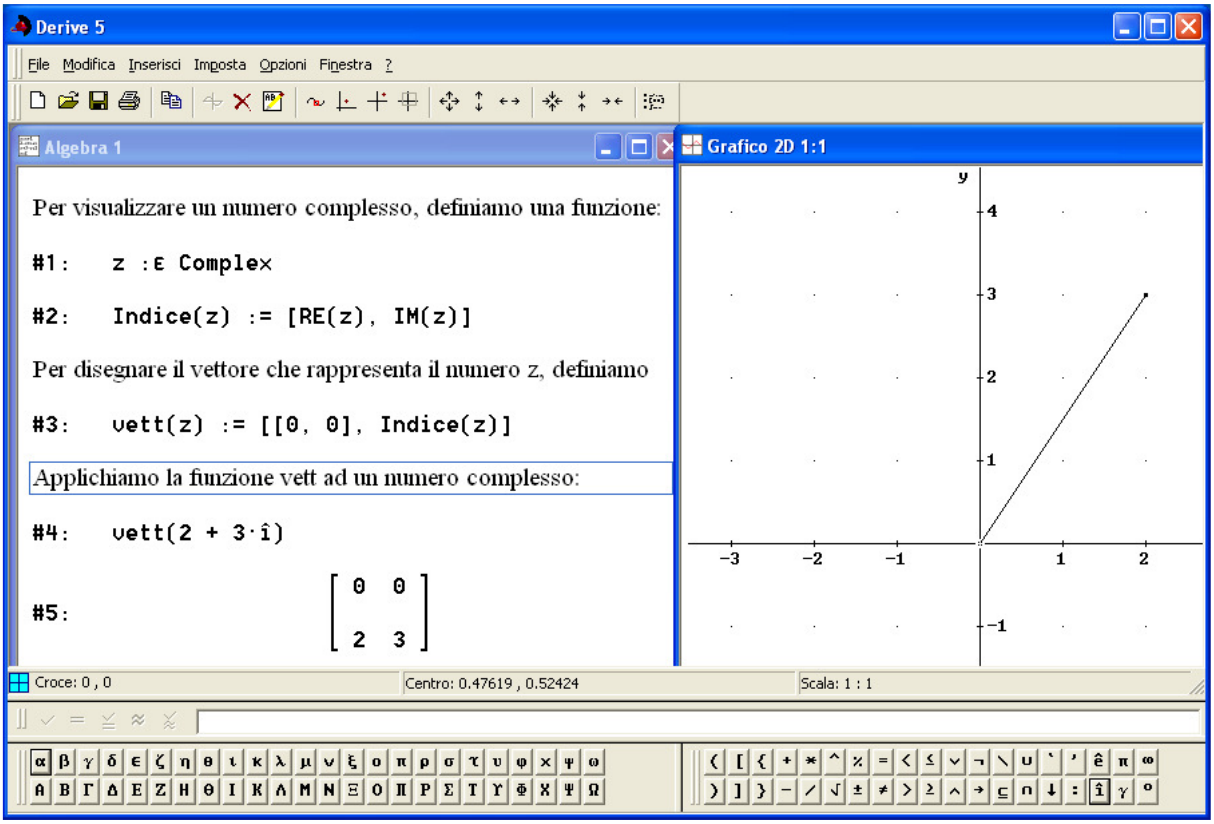
Per determinare le radici *n*-esime dell'unità, si procede come indicato nella seguente finestra di *Derive*:



Derive non ha una funzione per rappresentare geometricamente un numero complesso. Se si vuole rappresentarlo come un punto occorre costruire una funzione che possiamo chiamare INDICE(z), che a un numero complesso z fa corrispondere il punto di coordinate $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. La funzione, con il linguaggio di *Derive*, è così definita:

INDICE(z):= $\left[\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right]$.

Volendo invece far corrispondere al un numero complesso z un segmento che congiunga l'origine degli assi con il punto che rappresenta z (indice di z), si può definire la funzione: VETT(z):= [[0,0], INDICE(z)]. Nella figura seguente applichiamo la funzione VETT(z) al numero complesso Si chiede poi il disegno di tale vettore e si ottiene il segmento che rappresenta il numero complesso $2+3i$, ottenendo il vettore formato dai punti (0, 0) e (2, 3).



Riferimenti bibliografici e altri materiali

- AA.VV., *I numeri complessi*, Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n.4 del CNR, Università di Modena, 1990.
- G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna 2001.
- R. Bombelli, *L'Algebra*, prima ediz. integrale, a cura di U. Forti, prefazione di E. Bortolotti, Feltrinelli, Milano 1966.
- C.B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondatori, Milano 1980.
- U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni Editore, Firenze 1992.
- C. Citrini, *Analisi matematica* 1, Bollati Boringhieri, Torino 1991.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, seconda edizione, Bollati Boringhieri, Torino 2000.
- W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica,* Zanichelli, Bologna 1992.

- R. Franci, L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano 1979.
- L.S. Hahn, *Complex Numbers and Geometry*, MAA, Whashington 1994.
- M. Kline, *Storia del pensiero matematico,* Volumi 1° e 2°, Einaudi, Torino 1991.
- L. Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Editori Riuniti, Roma 1973.
- E. Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, 1994.
- P.J. Nahin, *An Imaginary Tale: the Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998.
- T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press 1999.

Libri di testo per la scuola secondaria superiore consultati

- C.C. Barozzi, *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli, Bologna 1989.
- L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 1°, 2°, 3°, Principato, Milano 1979.
- L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica Uno*, *Due e Tre,* Etas Libri, Milano 1996.
- W. Maraschini, M. Palma, *ForMat Spe. La formazione matematica per il triennio,* volumi 1°, 2° e 3°, Paravia, Torino 2000.
- M.A. Munem, D.J. Foulis, *Trigonometria*, Zanichelli, Bologna 1984.

Alcuni siti Internet sui numeri complessi

Una semplice ricerca in Internet scrivendo le parole “numeri complessi” (per cercare i siti in italiano) oppure “complex numbers”, “imaginary numbers”, … (per cercare quelli in inglese) permette di ritrovare centinaia di siti che riguardano i numeri complessi. Tra questi numerosissimi siti, molti anche di notevole livello didattico, segnaliamo i seguenti.

CD-rom "Storia Fantastica de L’Algebra" di Rafael Bombelli (IRRE Emilia Romagna): Un gioco per la Storia della Matematica. Un’avventura, con tre livelli di esercitazioni, le biografie dei grandi matematici del Rinascimento italiano. Vedi il sito dell’IRRE Emilia Romagna: http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/materiali.html

Nel seguente sito è possibile trovare un breve corso sui numeri complessi: http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/

I numeri complessi hanno uno stretto legame con la trigonometria. Nel sito “Il Giardino di Archimede” è possibile trovare una breve storia della trigonometria: http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/trigonometria/trigonometria/prima.html

Si consiglia la visita del sito del McTutor of History of Mathematics per le biografie dei matematici citati e per la lettura di alcuni articoli monografici sulla storia della risoluzione delle equazioni algebriche:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html

Nel sito seguente è possibile trovare ottime animazioni che utilizzano il software Cabri Géomètre e CabriJava per visualizzare le operazioni con i numeri complessi: http://www.ies.co.jp/math/cabri/cabrijava/indexeng.html

Il sito seguente, gestito dalla Wolfram Research, la “software house” del software *Mathematica*, contiene ottime schede sui numeri complessi: http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html