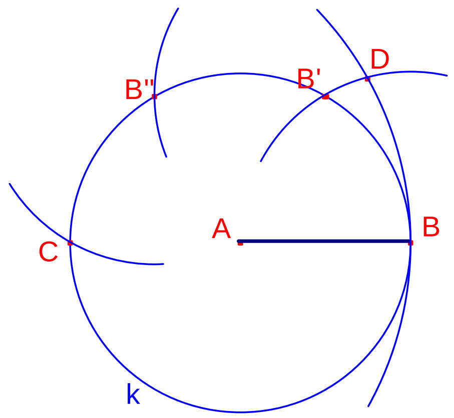
Il problema di Aprile 2007

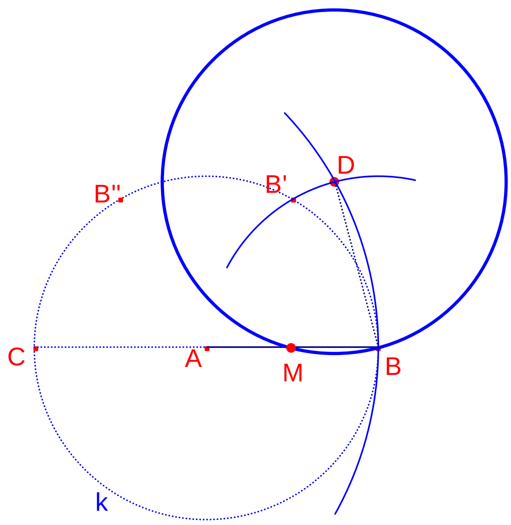
Si racconta che Leonardo Pisano, detto Fibonacci, appena decenne, avendo smarrito la squadra e non volendo farlo scoprire al padre, avesse ideato un ingegnoso metodo per trovare il punto medio di un segmento con l'uso del solo compasso.

Ecco la costruzione:
Dato un segmento AB si tracci la circonferenza ***k*** di centro A e raggio AB; con lo stesso raggio si traccino un arco di centro B che intersechi ***k*** in B', poi un arco di centro B' che intersechi ***k*** in B'' e uno di centro B'' che intersechi ***k*** in C.
Ora con centro C si tracci un arco di raggio CB e sia D il punto di intersezione con l'arco di centro B già tracciato.
[[…]]
Lasciamo a voi l'ultimo passaggio che permette di individuare il punto medio M di AB

Non sappiamo se il piccolo Leonardo abbia giustificato la sua costruzione.
Volete provarci?

NOTA: Non dimenticate di dimostrare prima che i punti C, A, B sono allineati.





Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle scuole:

LS "Aristosseno", Taranto (TA)
SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)
LS "A.Roiti", Ferrara (FE)

Nel problema dato si descriveva la parte iniziale costruzione del punto medio di un segmento con l'uso del solo compasso, attribuita a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, appena decenne, lasciando agli studenti il compito di trovare il passaggio conclusivo e di giustificare il risultato raggiunto.

La costruzione richiesta era abbastanza semplice, ma ci è piaciuta l'idea di presentare agli studenti, mediante un aneddoto, un altro aspetto di questo grande personaggio, noto soprattutto per la celebre successione che porta il suo nome e per la diffusione in Europa delle cifre arabe e della scrittura posizionale dei numeri.
Abbiamo inoltre facilitato la giustificazione suggerendo di dimostrare prima l'allineamento dei punti A, B, C, evitando agli studenti di lasciarsi ingannare dalla evidenza della figura.

Commentiamo ora brevemente ciascuna della risposte ricevute.

- LS "Aristosseno": gli studenti della classe 2M hanno completato la costruzione e fornito una dimostrazione succinta e completa, facendo ricorso alla similitudine. Abbiamo inserito nel testo due correzioni dove la loro esposizione ci è apparsa imprecisa.

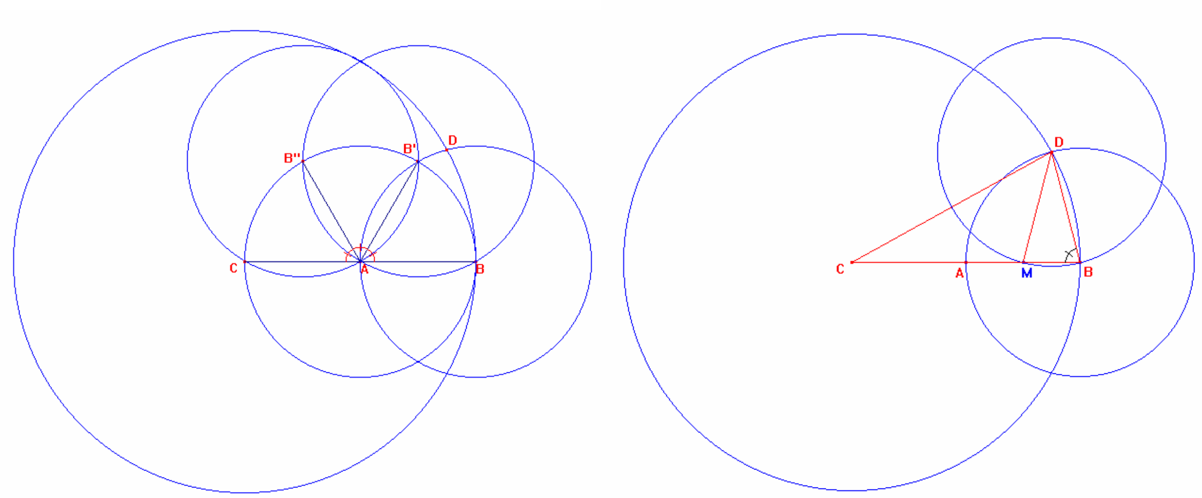
- SM "C.A. Dalla Chiesa": una studentessa della classe 3S ha provato di giustificare la costruzione ricorrendo alla simmetria assiale, ma non ha saputo individuare un percorso corretto per giungere alla conclusione. Abbiamo comunque apprezzato il suo tentativo, presenteremo la prima parte della sua risposta e la figura della seconda parte, accompagnata da una breve descrizione, per illustrare la sua idea.

- LS "A. Roiti": Giacomo Bergami della classe 3H, che per la prima volta partecipa a FLATlandia, dopo aver completato la costruzione, l'ha giustificata in due modi. Attratto forse dalle tante circonferenze, ha proposto una dimostrazione analitica in cui abbiamo riscontrato alcune imprecisioni di procedimento e qualche passaggio superfluo. Ha fornito anche una dimostrazione di tipo sintetico, un po' lunga nella esposizione, ma corretta. Presenteremo solo quest'ultima, anche se analoga a quella degli studenti dell'Aristosseno.

NOTA: *Le nostre osservazioni sono scritte in parentesi quadra. In doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.*

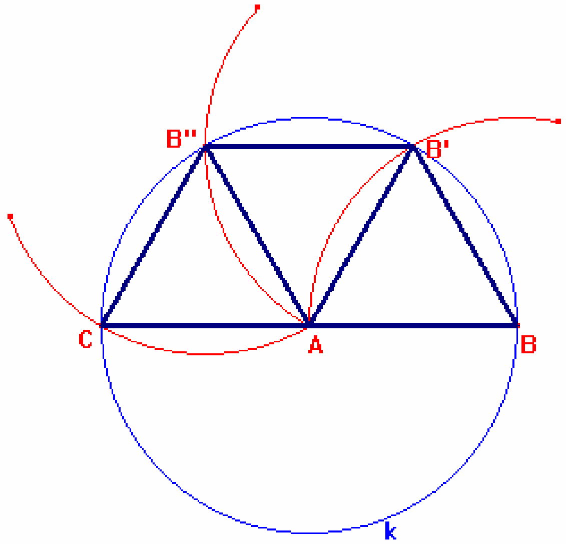
Classe 2M, Liceo scientifico “Aristosseno”

Taranto

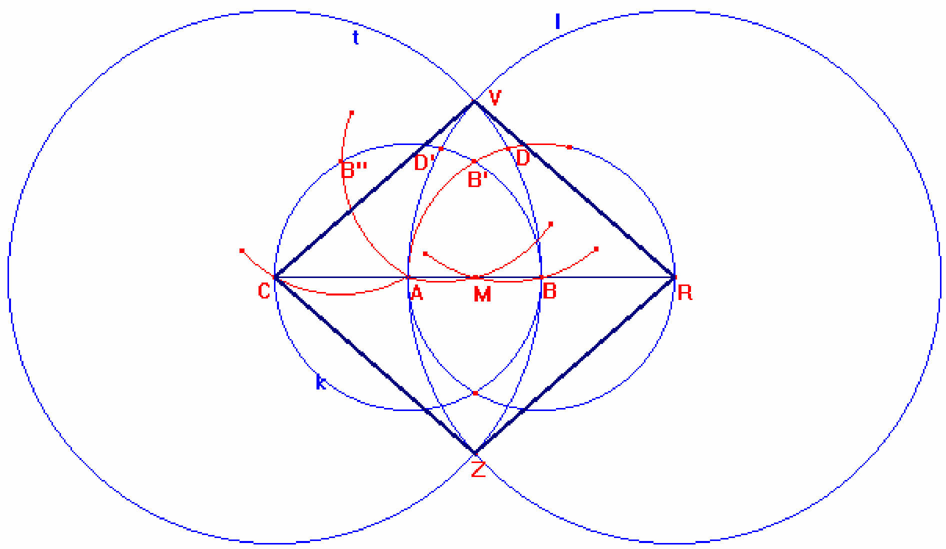


Tracciando i tre archi di centri B, B’ e B’’ e raggio AB, il piccolo Leonardo ha riportato per tre volte la misura del raggio AB sulla circonferenza k. Poiché il lato dell’esagono regolare inscritto in una circonferenza è congruente al raggio di questa, gli angoli al centro che insistono su corde uguali al raggio AB sono congruenti, BAB’ = B’AB’’ = B’’AC, **[e misurano]** 60°. Essendo la somma di questi tre angoli pari ad un angolo piatto , il punto C è allineato con A e con B.
Per completare la costruzione di Fibonacci , dopo aver tracciato la circonferenza di centro C e raggio CB e individuato il punto D, occorre tracciare un’ultima circonferenza di centro D e raggio DB: il punto di intersezione tra quest’ultima circonferenza e il segmento AB è proprio il punto medio M di AB.
Infatti, se consideriamo i triangoli isosceli BCD ed MBD notiamo che essi sono simili in quanto l’angolo CBD è in comune **[affinché due triangoli isosceli siano simili è sufficiente che abbiano congruenti o l’angolo al vertice o uno degli angoli alla base]. [Poiché hanno]** CD = CB = 2BD = 2DM, anche le loro basi sono nello stesso rapporto di similitudine 2, ovvero è BD = 2BM;
ed essendo AB = DB **[perché raggi di una stessa circonferenza]** sarà AB = 2BM .

Chiara Veronesi, classe 3S
Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)

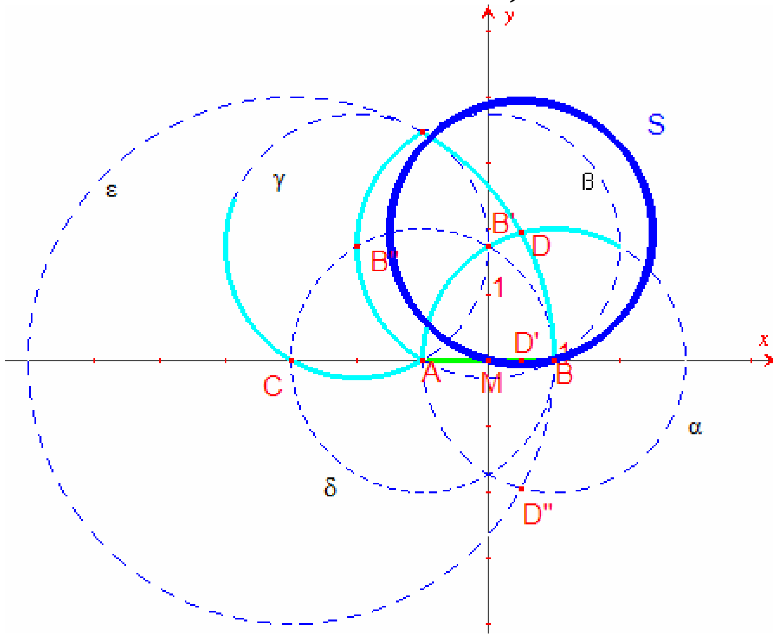


1 - Unisco i punti C, B'', B' e B **[[…]].** I segmenti CB'', B''B', B'B, BA, AC, AB'', AB' sono uguali per costruzione e perchè raggi di circonferenze congruenti.
Considero i triangoli CB''A, B''AB' e B'AB che risultano quindi equilateri ed hanno gli angoli interni di 60°.
Poiché gli angoli CAB'', B''AB' e B'AB sono tutti di 60°, la loro somma è uguale a 180° quindi CB è il diametro della circonferenza "k" e i punti A, B, C sono allineati. **[Ora si può affermare che ABB'B''C è un quadrilatero]**



2 – Trovato il punto D, con una costruzione analoga alla precedente, tracciando una circonferenza di centro B e raggio AB trovo il punto R, simmetrico di C **[rispetto a chi?].**
Nello stesso modo con cui ho trovato il punto D individuo il punto D', punto di intersezione tra la circonferenza "l" di centro R e raggio RA e la circonferenza "k".
[[…]]

Giacomo Bergami, classe 3H
Liceo scientifico "A. Roiti", Ferrara



Osserviamo la costruzione iniziale fornitaci dal problema (HP) :

- Circonferenza δ: punto in A con misura $\overline{AB}$
- Circonferenza α: punto in B con misura $\overline{AB}$; $\delta \cap \alpha = B'$
- Circonferenza β: punto in B' con misura AB; $\delta \cap \beta = B''$
- Circonferenza γ: punto in B'' con misura $\overline{AB}$; $\delta \cap \gamma = C$
- Circonferenza ε: punto in C con misura $\overline{CB}$; $\varepsilon \cap \alpha = D$

Per ottenere il punto medio è sufficiente costruire:

- Circonferenza *S*: punto in D con misura $\overline{DB}$; $S \cap AB = M, B$ tali che $\overline{MB} = \overline{AM}$

(DIM. GEOMETRIA ANALITICA) **[[…]]**

(DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA):

Consideriamo il triangolo ABB'
AB ≅ AB' Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB ≅ BB' Perché entrambi raggi della circonferenza α
ABB' è equilatero
BAB' = 1/3 π
Consideriamo il triangolo AB'B"
AB' ≅ AB" Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB' ≅ B'B" Perché entrambi raggi della circonferenza β
AB'B" è equilatero
B'AB" = 1/3 π
Consideriamo il triangolo AB"C
AB" ≅ AC Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB" ≅ B"C Perché entrambi raggi della circonferenza γ
B"AC = 1/3 π
Consideriamo i punti C,A,B e in particolar modo l'angolo CAB

CAB = BAB' + B'AB" + B"AC = 1/3 π + 1/3 π + 1/3 π = π

A,B,C Sono allineati

Consideriamo il triangolo BCD

CB ≅ CD   Perché entrambi raggi della circonferenza ε

BCD è isoscele

Consideriamo il triangolo BDM

BD ≅ DM   Perché entrambi raggi della circonferenza S

BDM è isoscele

Consideriamo i triangoli BDM e BCD e i loro angoli

CBD ≡ MBD

BDC = DBC   Perché BCD è isoscele

MBD = BMD   Perché BDM è isoscele

Per il I° Criterio di similitudine dei triangoli

BDM ∝ BCD

Considerando ora i loro lati

CB : BD = BD : MB

CB = CA + AB   Perché A,B,C sono allineati

CA = AB   Perché entrambi raggi della circonferenza δ

CB = 2 AB

BD = AB   Perché entrambi raggi della circonferenza α

2 AB : AB = AB : BM

BM = AB x AB / 2AB

BM = AB/2