FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)]*

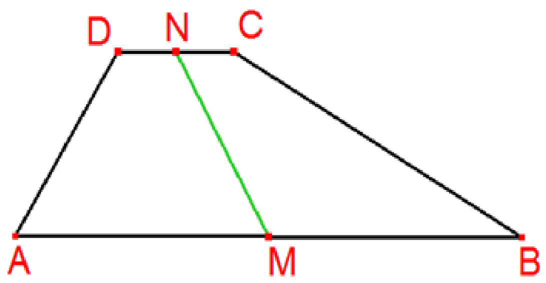
Flatlandia 14 – 28 novembre 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

1) Dimostrare che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

2) Sia dato un trapezio nel quale gli angoli alla base maggiore sono complementari. Provare che il segmento che unisce i punti medi delle basi è congruente alla semidifferenza delle basi stesse.

Giustificare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte sette risposte: una da una Scuola secondaria di I grado e sei da classi I o II di quattro Licei a indirizzo scientifico.
Il problema poneva due quesiti, il primo relativo a un triangolo rettangolo e il secondo relativo ad un trapezio.
Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare una "ben nota" proprietà del triangolo rettangolo, riguardante la mediana relativa all'ipotenusa.
Nel secondo quesito, dato un trapezio con gli angoli alla base complementari, si chiedeva di dimostrare una proprietà riguardante il segmento congiungente i punti medi delle basi. Per la dimostrazione di questo secondo quesito poteva risultare utile la proprietà dimostrata nel primo.
Al primo quesito tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto.
Nel secondo quesito quasi tutti (sei risposte su sette) dimenticano di provare che i prolungamenti di AD, NM e BC concorrono in uno stesso punto, cosa essenziale per la successiva dimostrazione.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

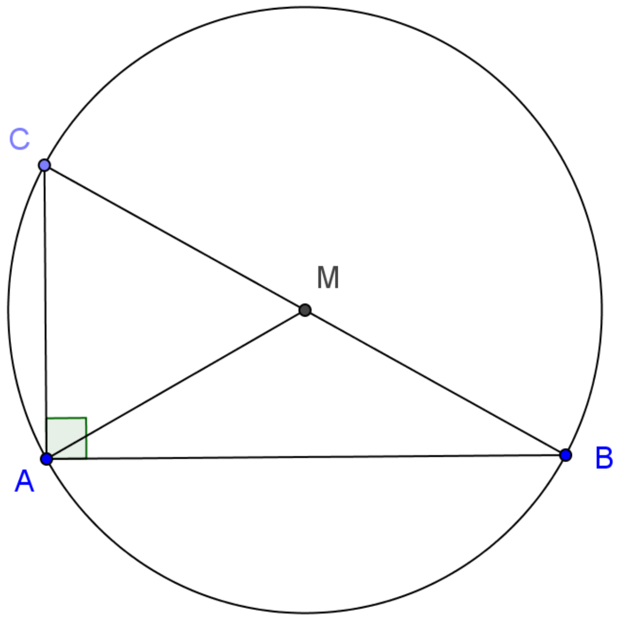
- Scuola Secondaria di I grado "G. Galilei", Santa Sofia (FC)
- Liceo "Bertrand Russell, Indirizzo Scientifico Scienze applicate, Cles (TN)
- Liceo "Aristosseno", Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico Scienze applicate, Liceo "Arimondi-Eula" di Savigliano (CN)
- Liceo Statale "Ettore Majorana", Pozzuoli (NA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

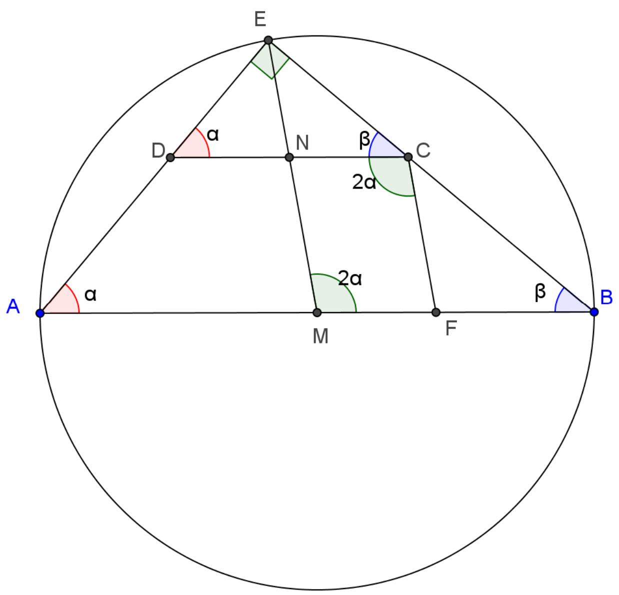
1) ***Mattia Corrà, 2D, scuola superiore, liceo Bertrand Russell, Cles (TN)***

1)



IP: AM mediana relativa a CB. ABC triangolo rettangolo.
TS: AM= CB/2.
DIM:
Il punto A [[deve appartenere]] [appartiene] alla circonferenza di centro M e raggio MC (o MB), se così non fosse l'angolo in A sarebbe diverso da 90° (infatti questo angolo sottende il diametro CB). Allora AM è un raggio come lo è CM o MB quindi AM=CB/2 (CB è infatti il diametro).

2)



IP: ABCD trapezio, α+β= 90° (complementari). N e M punti medi dei lati DC e AB rispettivamente.

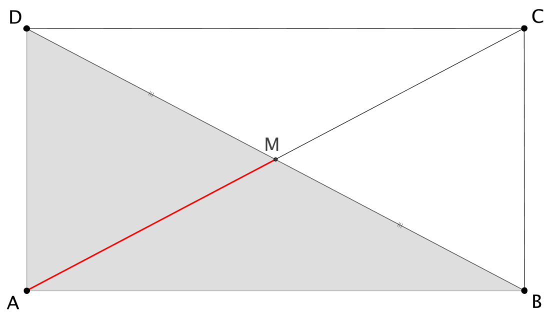
TS: MN= (AB-DC)/2.
DIM:
AB= 2MB e DC= 2NC perché N e M punti medi. Allora posso riformulare la tesi da MN= AB/2 - DC/2 a
MN= MB-NC.
L'intersezione dei prolungamenti dei lati AD e BC del trapezio è il punto E, il triangolo ABE è rettangolo perché $\alpha+\beta= 90°$ e quindi l'angolo in E deve essere di 90° (la somma angoli interni di un triangolo è di 180°).
Costruisco la circonferenza di centro M e con raggio MB o AM (sono congruenti perché M punto medio), la circonferenza passa per i punti A, E e B ed inoltre ME è raggio, tutto questo per dimostrazione precedente.
L'angolo CDE è congruente all'angolo BAE perché corrispondenti (AB//DC perché ABCD trapezio) e l'angolo ABE è congruente all'angolo DCE per lo stesso motivo.
L'angolo BME è uguale al doppio dell'angolo BAE quini uguale a 2α (l'angolo BME è l'angolo al centro che sottende lo stesso arco dell'angolo alla circonferenza BAE).
Ora, costruisco il parallelogramma MNCF, quindi MF è congruente a NC, MN è congruente a FC e l'angolo FMN (2α) è congruente all'angolo FCN, tutto questo per le proprietà del parallelogramma.
Allora l'angolo BCF è uguale a $180°-(2\alpha+\beta)$ e dato che $\alpha+\beta= 90°$ allora l'angolo BFC è uguale a β.
Il triangolo BFC è allora isoscele e quindi BF è congruente a FC che a sua volta è congruente a MN perché MFCN parallelogramma (quindi per la proprietà transitiva BF è congruente a MN).
BF è congruente a MB- MF quindi a MB-NC (MF=NC perché MFCN parallelogramma). BF è a sua volta congruente a FC (lati di triangolo isoscele) che a sua volta è congruente a MN (FC=MN perché MFCN parallelogramma).
Allora MN= MB-NC e quindi MN= AB/2 - DC/2. [Tutte queste considerazioni sono vere se i punti E, N, M sono allineati, cosa che bisogna quindi prima di tutto dimostrare].
C.V.D.

2) Giulio Bolego, classe 2D, Liceo "Bertrand Russell, Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

1.
Ipotesi:
ABD è un triangolo rettangolo;
AM è la mediana relativa all'ipotenusa.

Tesi:
La mediana AM è congruente a metà ipotenusa di ABD.

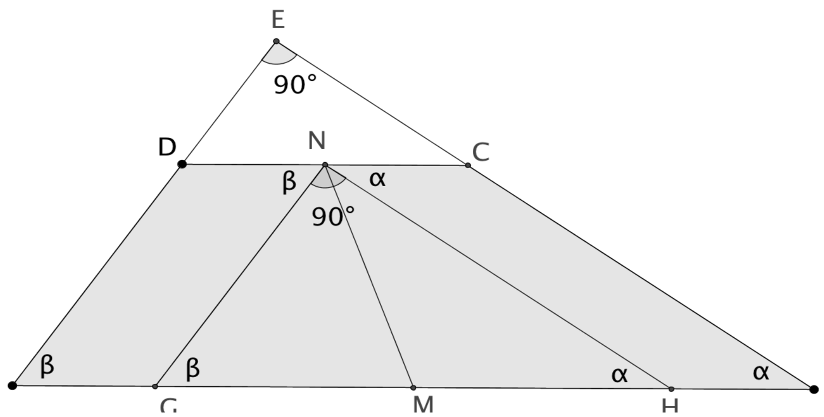
Dimostrazione:



Considero il triangolo rettangolo ABD. La sua ipotenusa è una delle due diagonali del rettangolo ABCD avente i lati congruenti a AB e DA (figura).
Per una proprietà del rettangolo le due diagonali AC e DB sono congruenti.
Per un'altra proprietà del rettangolo le due diagonali si tagliano scambievolmente a metà. Per tanto:
DM ≅ MB ≅ AM ≅ MC.
Il segmento AM è mediana di DB per ipotesi e quindi:
AM ≅ BM, MD

⇒ La mediana AM è congruente a metà ipotenusa di ABD.

2.
Sia dato un trapezio nel quale gli angoli alla base maggiore sono complementari. Provare che il segmento che unisce i punti medi delle basi è congruente alla semidifferenza delle basi stesse.



Ipotesi:
ABCD è un trapezio;
gli angoli alla base di ABCD (α, β) sono complementari;

N e M sono i punti medi rispettivamente di DC e AB, e NM è il segmento che li congiunge.

Tesi:
NM è congruente alla semidifferenza delle due basi del trapezio.

Dimostrazione:
La tesi che devo dimostrare è la seguente:
$$NM = \frac{AB - DC}{2}$$
Visto che M e N sono due punti medi posso riformulare la tesi in questo modo:
$$NM = MB - NC$$

Detto ciò, prolungo i lati AD e BC, chiamando E l'intersezione. L'angolo così formatosi (AEB), è un angolo retto in quanto dato che α e β sono angoli complementari per ipotesi:
180° - 90° = 90°.
Traccio poi due segmenti; il primo (NG) parallelo a DA, il secondo (NH) parallelo a CB. Anch'essi si intersecano perpendicolarmente visto che sono paralleli ai lati del trapezio.

Considero poi il triangolo GNH. Esso ha:
-NGH congruente a β, perché angoli corrispondenti prendendo come rette parallele AD e GN e come trasversale AG;
-NHG congruente a α, perché angoli corrispondenti prendendo come rette parallele NH e CB e come trasversale HB;
-l'angolo GNH di 90° perché ho tracciato due rette parallele ai lati del triangolo ABE, come detto in precedenza;
-GM □ MH, per sottrazione di segmenti congruenti, in quanto tracciando le due parallele ho formato due parallelogrammi, con una coppia di lati congruenti (DN□AG□NC□HB), che sottraggono così lo stesso segmento da entrambi i segmenti AM e MB.

$\Rightarrow$i triangoli GMN e NMH sono isosceli per la dimostrazione del punto 1.

Riprendendo la tesi
$$NM = MB - NC$$

posso scrivere, considerando il triangolo isoscele NMH, in modo equivalente

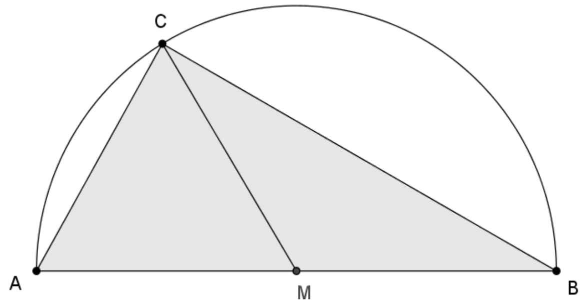
[[$MH = MB - HB$]]   [$NM = MH = MB - HB = MB - NC$]

$\Rightarrow$ il segmento che congiunge i punti medi delle basi di un trapezio, con gli angoli alla base maggiore complementari, è congruente alla semidifferenza delle basi stesse.

3) Lavoro del gruppo: Francesco Balzani, Mattia Biandronni e Nicole Michelacci – classe 3°, Scuola Secondaria di I grado "Galilei" – Santa Sofia (FC)

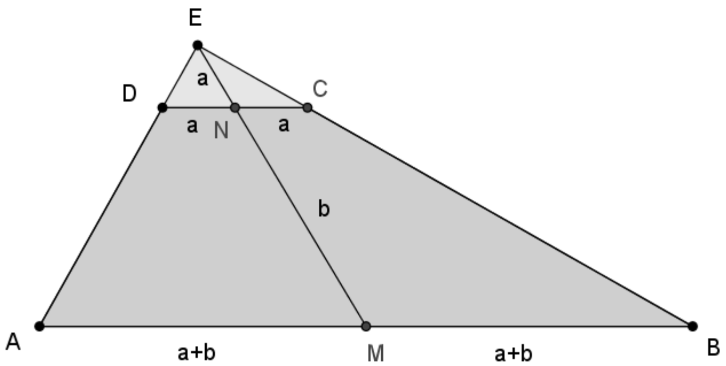
Risoluzione del problema di Flatlandia di Novembre

1) Ogni triangolo è [[circoscrivibile]] [inscrivibile in un cerchio] e il centro del cerchio circoscritto (circocentro) è dato dall'incontro degli assi dei lati. Nel caso particolare del triangolo rettangolo il circocentro coincide con il punto medio dell'ipotenusa e l'ipotenusa è diametro del cerchio.



Pertanto la mediana relativa all'ipotenusa che è raggio del cerchio è metà dell'ipotenusa che è diametro.

2) Se prolunghiamo i lati AD (dalla parte di D) e BC (dalla parte di C) il loro punto d'incontro E sarà anche vertice con angolo retto del triangolo rettangolo EAB (rettangolo perché gli altri due angoli sono complementari). Per tale motivo anche EDC è un triangolo rettangolo.
Pertanto per entrambi i triangoli vale la proprietà per la quale le mediane relative all'ipotenusa sono congruenti a metà ipotenusa.
Se indichiamo con **a** la mediana EN (e quindi anche DN e NC) e con **b** il segmento NM, le due metà di AB, AM e MB misureranno entrambe **a + b**. [Questo è vero se però si dimostra che i punti E, N, M sono allineati].



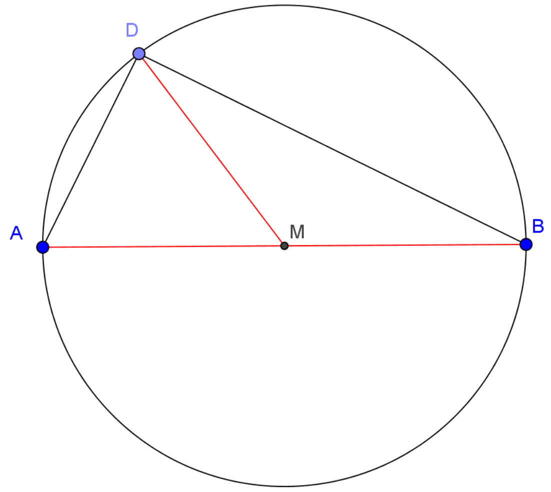
Quindi le due basi misureranno: AB = **2a + 2b** CD = **2a**
Facendo la semidifferenza delle basi otteniamo:

$$\frac{2a+2b-2a}{2}$$

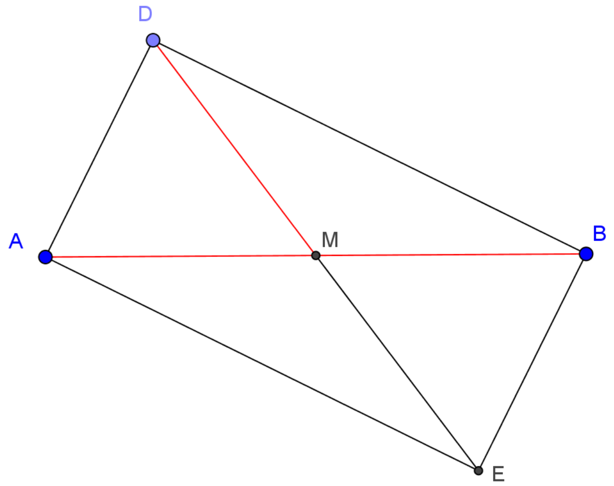
Eliminando i due monomi opposti otteniamo $\frac{2b}{2}=b$ (NM)

Pertanto la semidifferenza tra le basi è congruente al segmento NM.

4) Classe I H, indirizzo Liceo Scientifico, Liceo Aristosseno di Taranto

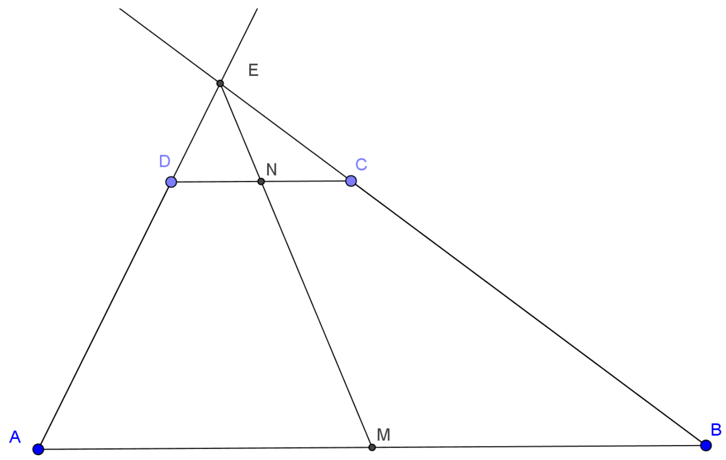


1)Un triangolo rettangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza ,il cui centro è il punto medio dell'ipotenusa (infatti l'angolo retto di vertice il punto *D* è la metà dell'angolo al centro corrispondente $A\hat{M}B$ che è piatto).I tre vertici *A,B* e *D* del triangolo sono equidistanti dal centro *M* della circonferenza circoscritta e per questo la mediana *DM* è congruente ad *AM* e anche ad *MB*,ovvero è la metà dell'ipotenusa *AB*.



Si potrebbe anche prolungare la mediana *DM* del segmento *ME* ad essa congruente .Il quadrilatero AEBD è un parallelogramma poiché le sue diagonali *AB* e *DE* si incontrano nel loro punto medio. Ma siccome l'angolo $A\hat{D}B$ è retto ,il parallelogramma è un rettangolo. Nel rettangolo le diagonali sono congruenti e quindi *DM=AM=MB* .

2)



I prolungamenti dei lati obliqui del trapezio ABCD si incontrano nel punto *E* ,individuando il triangolo AEB che è rettangolo in *E*, avendo gli angoli acuti in *A* e in *B* complementari. Si avrà perciò ,per il punto 1) : $EM=AM=MB$,nel triangolo AEB

e $EN=DN=NC$ nel triangolo DEC ,anch'esso rettangolo in *E*.

E allora : $NM= EM - EN = AM - DN = AB/2-CD/2 = (AB-CD)/2$ cvd

[Bisogna però provare che i punti E,N,M sono allineati].

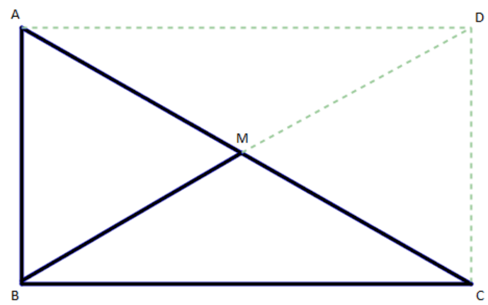
5) Enrico Bellino, della classe 2 D scientifico opzione scienze applicate del Liceo Arimondi-Eula di Savigliano (CN)

Flatlandia –Problema 14 - 28 novembre 2016

1) Dimostrare che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.
2) Sia dato un trapezio nel quale gli angoli alla base maggiore sono complementari. Provare che il segmento che unisce i punti medi delle basi è congruente alla semidifferenza delle basi stesse.

Giustificare tutte le risposte.

1) Ip: $AM \cong MC$



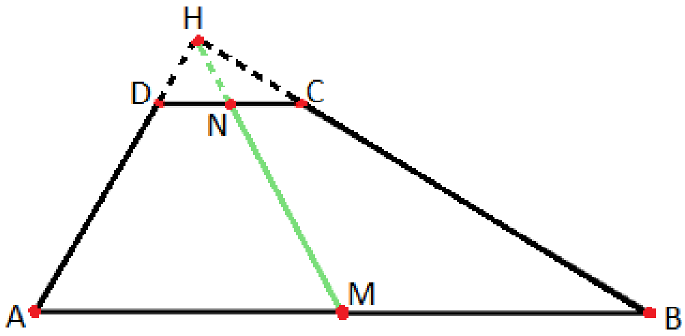
$A\hat{B}C = 90°$

Ts: $BM \cong \frac{1}{2}AC$

Consideriamo BM:
prolunghiamo BM dalla parte di M in modo tale che $MD \cong BM$,
tracciamo il segmento DC
Consideriamo i triangoli BMA e CMD, hanno:
$BM \cong MD$ per costruzione,
perché angoli opposti al vertice,
$AM \cong MC$ per Ip.
Quindi: $BMA \cong CMD$ per il primo criterio di congruenza.
In particolare:
Consideriamo le rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD, esse hanno gli angoli alterni interni quindi AB || CD. Segue che $A\hat{B}C \cong B\hat{C}D = 90°$ perché coniugati interni delle stesse parallele tagliate dalla trasversale BC
Consideriamo i triangoli ABC e BCD, hanno:
per dim. prec.
BC in comune
$AB \cong CD$ per dim. prec.
Quindi: il triangolo $ABC \cong BCD$ per il primo criterio.
In particolare: $AC \cong BD$
Quindi: $BM \cong \frac{1}{2}BD \cong \frac{1}{2}$ AC

C.V.D.

2)



Ip: AB || CD

$AM \cong MB$

$DN \cong NC$

$D\hat{A}B + A\hat{B}C = 90°$

Ts: $MN \cong \dfrac{AB - CD}{2}$

Consideriamo i segmenti AD, MN, BC:
li prolunghiamo dalla parte di D, N e C, essi si incontrano in H [questo deve essere dimostrato !].
Consideriamo il triangolo ABH, ha:

$\hat{A}$

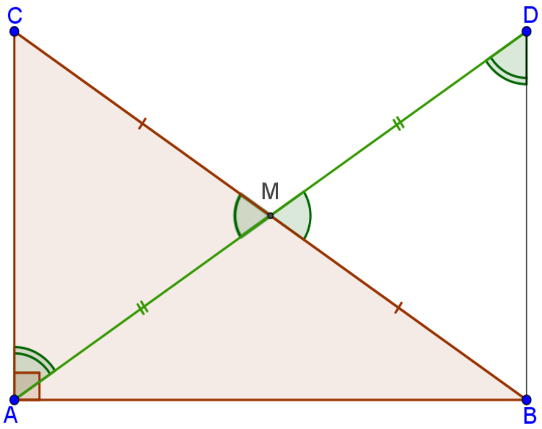
A$\hat{H}$B = 90° perché è la differenza tra la somma degli angoli interni e la somma di B e A$\hat{B}$H.

Quindi : $MH \cong \dfrac{1}{2}AB$ per dimostrazione 1)
Consideriamo il triangolo DCH, ha:
DHC = 90° [perché congruente ad AHB] perché la differenza tra la somma degli angoli interni e la somma di DCH e CDH*.
* DCH e CDH sono congruenti a rispettivamente a ABH e BAH, perché angoli corrispondenti delle rette AB || DC tagliate da CB e AD.

Quindi: $NH \cong \dfrac{1}{2}DC$ per dimostrazione 1)
Consideriamo i segmenti MH, NH e MN:
$MN \cong MH - NH$

Quindi: $MN \cong \dfrac{AB}{2} - \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB - CD}{2}$.
C.V.D.

Gaetano Trovato, classe IIA Liceo Statale "Ettore Majorana", Pozzuoli (NA)



Dimostrazione primo quesito

Hp: ABC triangolo rettangolo in A
$BM \cong CM$

Th: $AM \cong BM \cong \frac{1}{2} BC$

Dimostrazione 1:

Prolungo la mediana relativa all'ipotenusa AM di un segmento $MD \cong AM$ e congiungo D con B.

I triangoli $AMC \cong BMD$ per I Criterio, per avere:

$MC \cong MB$ per Hp;

$AM \cong MD$ per costruzione;

$A\hat{M}C \cong B\hat{M}D$ perché opposti al vertice.

In particolare essi hanno: [[$C\hat{A}M \cong A\hat{O}B$]] [$C\hat{A}M = A\hat{D}B$] C e poiché essi sono nella posizione di angoli alterni interni rispetto a BD e AC tagliate dalla trasversale AD, si deduce che AC // BD.

Poiché $C\hat{A}B \cong \frac{\pi}{2}$, anche $D\hat{B}A \cong \frac{\pi}{2}$ visto che la somma degli angoli coniugati interni è congruente a π.

Consideriamo i triangoli ABC e ABD e diremo che essi saranno congruenti per il I criterio visto che:

$C\hat{A}B \cong D\hat{B}A \cong \frac{\pi}{2}$;

AB in comune;

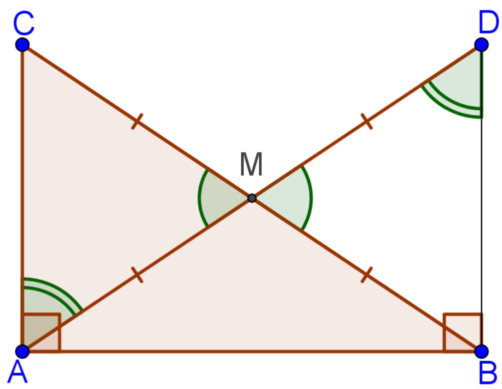
$AC \cong BD$ perché i triangoli AMC e DMB sono congruenti tra loro.

Pertanto:

$BC \cong AD$

da cui $AM \cong MD \cong CM \cong MB$ e quindi per transitività

$AM \cong BM \cong \frac{1}{2} BC$ c.v.d.

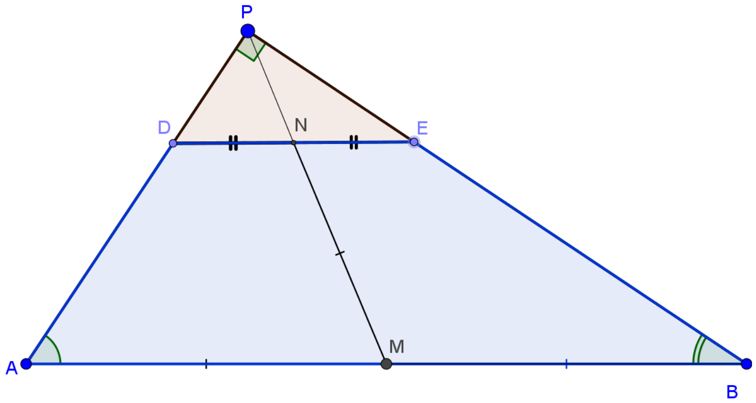


Dimostrazione del secondo quesito

Hp: ABED è un trapezio
$DN \cong NE$
$AM \cong MB$

-

Th: $NM \cong \dfrac{AB - DE}{2}$

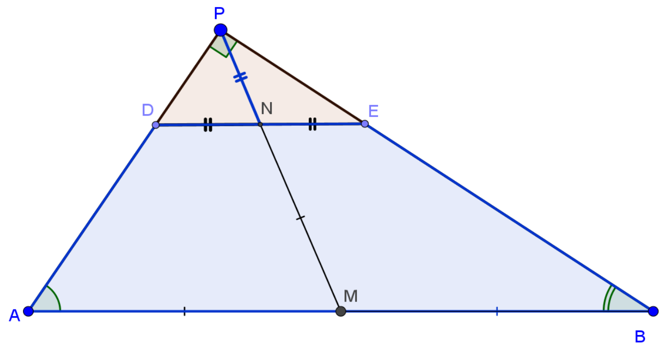


Dimostrazione 2:
Prolungo i segmenti AD, NM, EB incontrandosi in P. [Perché si incontrano nello stesso punto P?]
Consideriamo il triangolo ABP:

$P\hat{A}B + A\hat{B}P \cong \dfrac{\pi}{2}$ per hp e quindi per differenza:

$A\hat{P}B \cong \pi - \left(P\hat{A}B + A\hat{B}P\right) \cong \pi - \dfrac{\pi}{2} \cong \dfrac{1}{2}\pi$ Pertanto il triangolo APB è un triangolo rettangolo in P.

Per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa diciamo che $PM \cong AM \cong MB$.
Consideriamo il triangolo DPE, sarà anch'esso rettangolo visto che $D\hat{P}E \cong \dfrac{\pi}{2}$.



Per Hp $DN \cong NE$, quindi PN è la mediana relativa all'ipotenusa DE e $DN \cong NE \cong PN$.
Infine otteniamo che:
$NM = PM - PN$ con $PM \cong MB$, $PN \cong NE$ e quindi per transitività segue che:

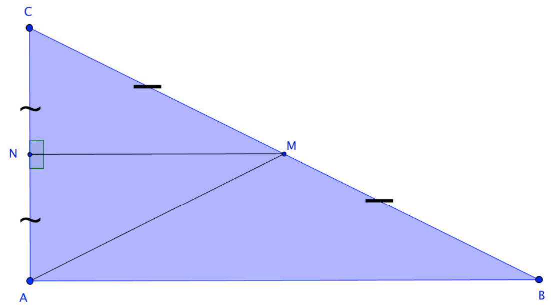
$NM \cong MB - NE \cong \dfrac{1}{2}AB - \dfrac{1}{2}DE \cong \dfrac{AB - DE}{2}$.

c.v.d.

6) Elisa Ianes, 2D, Liceo Bertrand Russell, Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

(Soluzione arrivata in ritardo)

1)



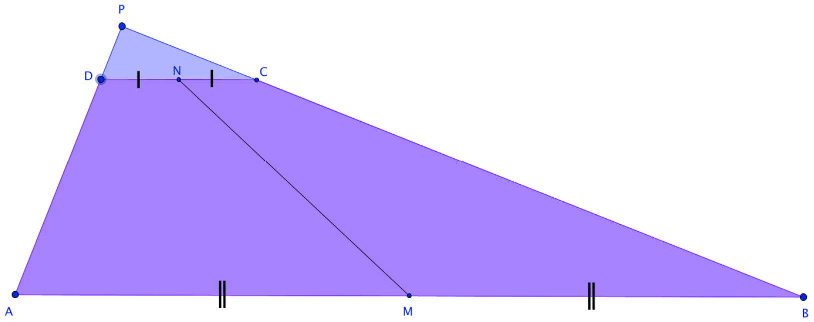
I

POTESI:
il triangolo CAB è rettangolo [in A]
AM mediana [relativa all'ipotenusa]
CM ≅ MB

TESI:
AM ≅ CM ≅ MB

DIMOSTRAZIONE:
traccio il segmento NM parallelo al segmento AB
CN≅NA per teorema di Talete
gli angoli MNA ≅ MNC e di 90° per proprietà rette parallele
considero i triangoli NMA e NMC
NM in comune
i triangoli NMA ≅ NMC per primo criterio
=> AM ≅ CM ≅ MB

2)



IPOTESI:

AM ≅ MB

DN ≅ DC

gli angoli BAD + ABC = 90°

TESI:

NM = AM – DN = $\frac{AB}{2}$ - $\frac{CD}{2}$

DIMOSTRAZIONE:

prolungo i segmenti BC e [[AC]] [AD] dalla parte [[degli angoli]] [dei punti] C e D, trovando il punto P

gli angoli CDP + DCP = 90° per proprietà rette parallele

l'angolo P è di 90° per sottrazione angoli

il triangolo ABP è un triangolo rettangolo

PM ≅ AM ≅ MB per dimostrazione punto precedente

considero il triangolo PCD

PN ≅ DN ≅ CN per dimostrazione punto precedente

PM = PN + NM

NM = PM – PN

=> NM = AM – DN = $\frac{AB}{2}$ - $\frac{CD}{2}$ [la dimostrazione richiede però che i tre punti P,N,M siano allineati, e questo va provato].