FLATlandia

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema 9 – 31 maggio 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

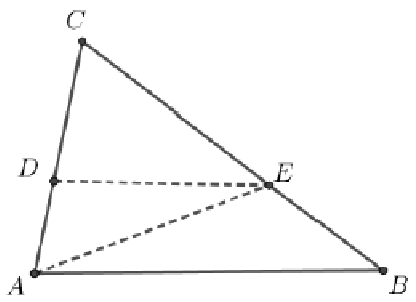
Flatlandia - Problema 9 - 31 maggio 2022

Dato il triangolo ABC, sia D un punto sul lato AC ed E un punto sul lato BC.

a) Sapendo che $\overline{CD} = 3$, $\overline{AD} = 2$, $\overline{CE} = 5$ e $\overline{BE} = 3$, determinare il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e DEC (vedi figura).

b) I segmenti AB e DE sono paralleli?

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 7 risposte, tutte da classi di Liceo scientifico.

Dati un triangolo ABC e due punti fissati D ed E, rispettivamente sui lati AC e BC del triangolo stesso, il problema chiedeva di determinare il rapporto tra le aree di due particolari triangoli cosi ottenuti all'interno di ABC. Si chiedeva poi di stabilire se due opportuni segmenti fossero o meno paralleli.

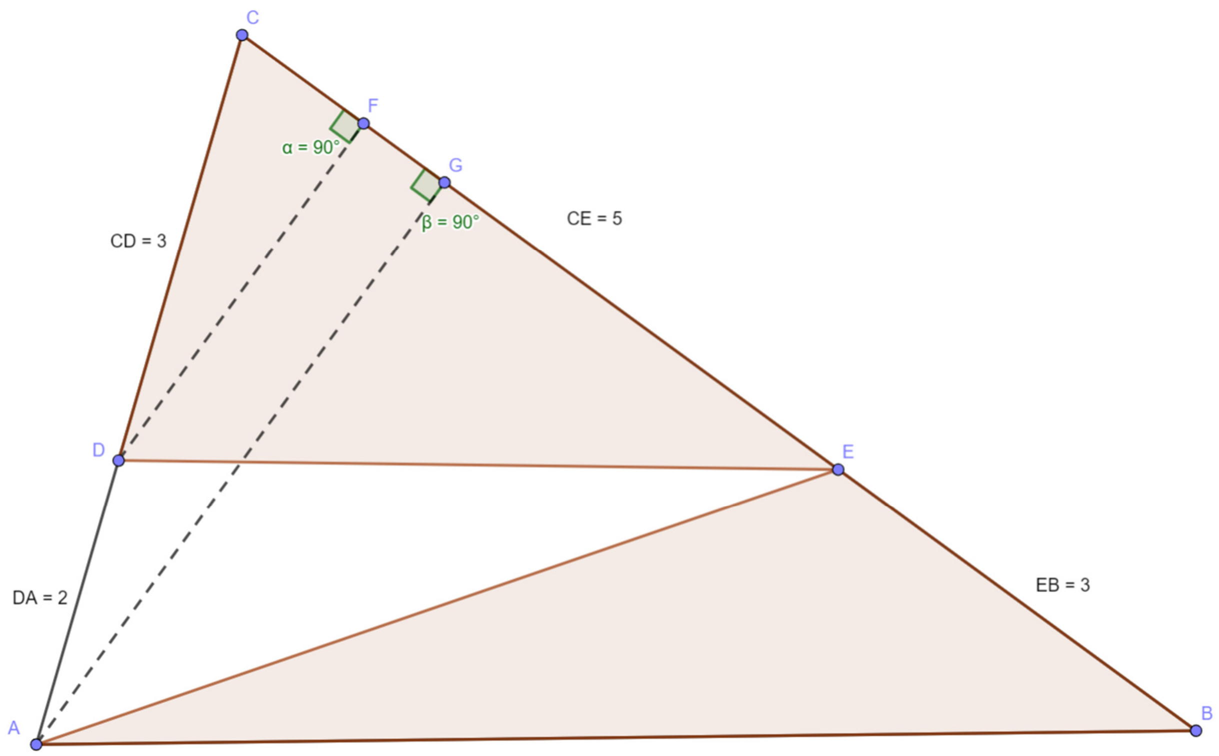
Le soluzioni arrivate sono tutte corrette. Notiamo solo che quando si parla di altezza di un triangolo è sempre opportuno specificare rispetto a quale base.

Sono arrivate risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
- Liceo scientifico, opzione scienze applicate "B. Russell", Cles (TN), 2 soluzioni
- Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento, 2 soluzioni
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara
- Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)
- Liceo Scientifico "Archimede", Messina

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Viola Torresani, Classe: 2C, Liceo scientifico opzione scienze applicate "B. Russell", Cles (TN)



IPOTESI:
CD = 3; DA = 2; CE = 5; EB = 3;

TESI:

a. trova il rapporto fra l'area dei triangoli ABE e DEC;
b. verificare se AB ⫽ DE.

COSTRUZIONI:
Costruisco l'altezza DF del triangolo DEC [relativa al lato CE];
Costruisco l'altezza AG del triangolo BAE [relativa al lato BE];

DIMOSTRAZIONE:

a. Considero i triangoli AGC e DFC. Essi hanno:

- L'angolo C in comune;
- Gli angoli CFD e AGC congruenti per la costruzione (angoli retti);

Quindi i triangoli AGC e DFC sono simili per il primo criterio dei triangoli simili, in particolare $AG = 5/3\ DF$.

L'area del triangolo DEC è (CE · DF) / 2 = (5 · DF) / 2
L'area del triangolo ABE è (BE · AG) / 2 = (3 · (5 / 3) · DF) / 2 = (5 · DF) / 2

$(A_{DEC} / A_{ABE}) = ((5 \cdot DF) / 2) / ((5 \cdot DF) / 2) = 1$

Quindi il rapporto fra le aree dei triangoli DEC e ABE è 1.

b. I segmenti DE e AB non sono paralleli infatti il rapporto fra i segmenti CD e DA è diverso dal rapporto dei segmenti CE e AB (teorema di Talete).

2) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3C, Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento

Ipotesi:

- ABC triangolo generico
- $\overline{CD}$=3
- $\overline{DA}$=2
- $\overline{CE}$=5
- $\overline{EB}$=3
- D appartiene $\overline{AC}$
- E appartiene $\overline{BC}$

Richiesta: Determinare il rapporto A_{ABE} / A_{DEC}

Verifica dell'eventuale parallelismo tra i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$

Dimostrazione: [la figura !!!]

Ricordando il teorema della trigonometria per il calcolo dell'area di un triangolo, [abbiamo] [[definiamo]]:

Area CDE = $\frac{CD * CE * sin\,\widehat{DCE}}{2} = \frac{3 * 5 * sin\,\widehat{DCE}}{2} = \frac{15 * sin\,\widehat{DCE}}{2}$

Area ABC = $\frac{AC * BC * sin\,\widehat{DCE}}{2} = \frac{5 * 8 * sin\,\widehat{DCE}}{2} = 20 * \ sin\,\widehat{DCE}$

Notiamo poi che l'altezza del triangolo ADE relativa alla base $\overline{AD}$ è uguale all' altezza del triangolo CDE rispetto alla base $\overline{CD}$.

Ma l'altezza del triangolo CDE (chiamata per comodità "h") è ricavabile dalla sua area considerando

che Area CDE = $\frac{CD*h}{2}$ $\rightarrow$ h = $\frac{2\ Area_{CDE}}{CD}$ $\rightarrow$ h = $\frac{2* 15 *\sin \widehat{DCE}}{2 * 3}$ = 5 sin $\widehat{DCE}$

Dunque l'area del triangolo DAE = $\frac{DA * h}{2}$ = $\frac{2 *5*\sin \widehat{DCE}}{2}$ = 5 * sin $\widehat{DCE}$

L'area di ABE sarà allora per costruzione = Area ABC – Area CDE – Area DAE = $20 * \ sin\,\widehat{DCE}$ - $\frac{15 * sin\,\widehat{DCE}}{2}$ - 5 * sin $\widehat{DCE}$ = $\frac{15 * sin\,\widehat{DCE}}{2}$

Si nota dunque che l'area del triangolo CDE è uguale a quella del triangolo ABE. Di conseguenza il rapporto fra le loro aree è 1.

Il teorema di Talete afferma che un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali genera coppie di segmenti direttamente proporzionali. Partendo da questo immaginiamo di costruire la parallela al segmento AB, passante per C. Consideriamo a questo punto la retta “r” appena creata, la retta per DE e quella per AB. Se esse fossero parallele, per il teorema di Talete allora CD:DA=CE:EB.

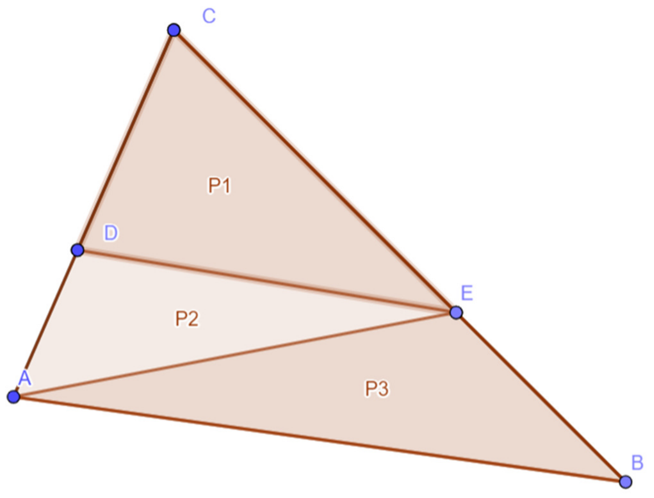
Sostituendo numericamente: 3:2=5:3.

È facile notare che [la relazione] [[l’equazione]] è falsa, dunque il teorema di Talete non è valido, ne consegue che la retta DE non è parallela [alla retta] [[quella]] AB.

CVD

3) Soluzione inviata da Andrea Di Cintio, 2^E, Liceo Scientifico Galileo Galilei, Pescara

IPOTESI:
ABC triangolo;
$E \in BC$
$D \in AC$
CD = 3
AD = 2
CE =5
BE = 3



TESI:

a. A(ABE)/A(DEC) = ?
b. AB // DE ?

DIMOSTRAZIONE:

b. AB non è parallelo a DE per il teorema di Talete: 3/2 ≠ 5/3

a.

Suddivido il triangolo ABC in tre triangoli:

Triangolo DEC = P1; [di area A1]

Triangolo DEA = P2; [di area A2]

Triangolo ABE = P3; [di area A3]

A1/A2 = 3/2 poiché nei triangoli P1 e P2 l'altezza è la stessa per costruzione (per basi adiacenti) e le basi sono in rapporto 3:2;

(A1 + A2)/A3 = 5/3 poiché nei triangoli AEC (P1+P2) e P3 l'altezza è la stessa per costruzione (per basi adiacenti) e le basi sono in rapporto 5:3;

A2 = 2/3A1 dall'equivalenza precedente;

(A1 + ⅔(A1))/A3 = 5/3 per sostituzione di aree uguali;

(5/3(A1))/A3 = 5/3

5/3(A1) = 5/3(A3)

A1 = A3

A1/A3 = 1

A(ABE)/A(DEC) = 1

4) Soluzione proposta da Filippo Chiappini, 1D, Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)

Hp

$\overline{BE} \cong \overline{CD} = 3$

$\overline{AD} = 2$

$\overline{CE} = 5$

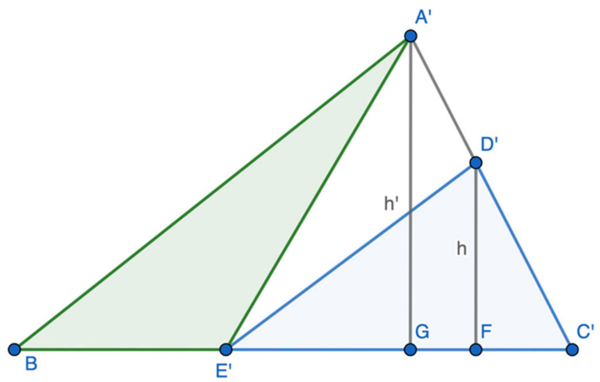
Th

$\frac{A_{ABE}}{A_{DEC}} = ?$

$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$?

Dimostrazione

a)



Considerando le altezze relative a $\overline{BE}$ ed $\overline{EC}$, h e h^I, [nei triangoli ABE e EDC rispettivamente] si nota che i triangoli AGC e DFC sono simili per il primo criterio di similitudine, dato che:

- $\hat{C}$ è in comune;
- $\widehat{AGC}$ e $\widehat{DFC}$ sono retti, dato che i vertici sono piedi di due altezze;
- $\widehat{GAC} \cong \widehat{FDC} = 180 - \left(\hat{C} + \widehat{AGC}\right) = 180 - \left(\hat{C} + \widehat{DFC}\right)$.

Di conseguenza si avrà un rapporto di proporzionalità tra i lati, e in particolare tra altezze e ipotenuse:

$$h^I : h = \overline{CA} : \overline{CD} = (2+3) : 3 = 5 : 3$$

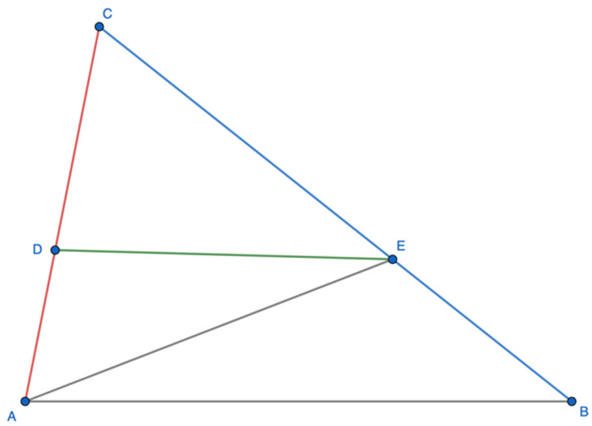
Da ciò si ottiene che:

$$h = \frac{3}{5} h^I$$

quindi

$$\frac{A_{ABE}}{A_{DEC}} = \frac{\overline{BE}h^I/2}{\overline{CE}h^I\frac{3}{5}/2} = \frac{3h^I/2}{5h^I\frac{3}{5}/2} = 1$$

b)



Se per assurdo $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, per il Teorema di Talete

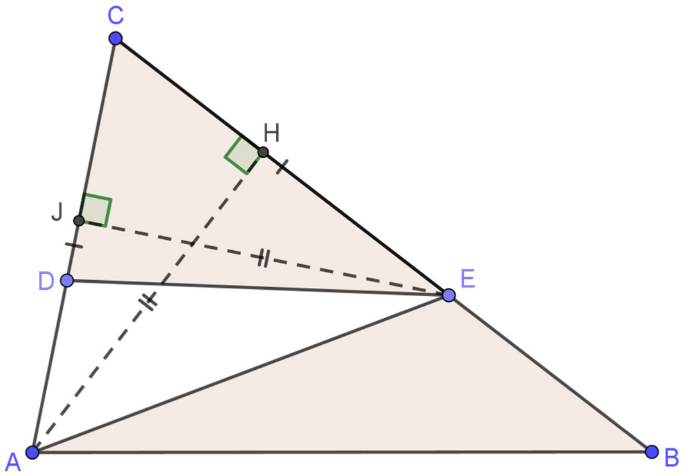
$$\overline{CD}:\overline{DA} = \overline{CE}:\overline{BE},$$

ma la condizione non si verifica dato che

$$3:2 \neq 5:3.$$

Quindi le rette passanti per $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ sono incidenti.

5) Soluzione proposta da Riccardo Barbaccia, 2^B STEM, Liceo Scientifico "Archimede", Messina



$$\left.\begin{array}{c} ABC \\ D \in AC \,,\, E \in BC \\ \overline{DC} = 3 \,,\, \overline{AD} = 2 \\ \overline{CE} = 5 \,,\, \overline{BE} = 3 \end{array}\right. \implies \begin{array}{c} \dfrac{A_{ABE}}{A_{DEC}} = ? \\ \\ AB \parallel DE \ ? \end{array}$$

Costruisco $AH \perp BC$ e $EJ \perp AC$.

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 2 + 3 = 5$ $\overline{CE} = 5$ per ipotesi $\implies CA = CE \implies ACE$ triangolo isoscele $\implies \implies \overline{AH} = \overline{EJ}$ poiché altezze relative ai lati congruenti .

$$A_{ABE} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{3\overline{AH}}{2} \ ; \ A_{DEC} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{EJ}}{2} = \frac{3\overline{EJ}}{2} = \frac{3\overline{AH}}{2} \text{ poichè } \overline{AH} = \overline{EJ} \implies \frac{A_{ABE}}{A_{DEC}} = \frac{\frac{3\overline{AH}}{2}}{\frac{3\overline{AH}}{2}}$$

$$= 1 \, .$$

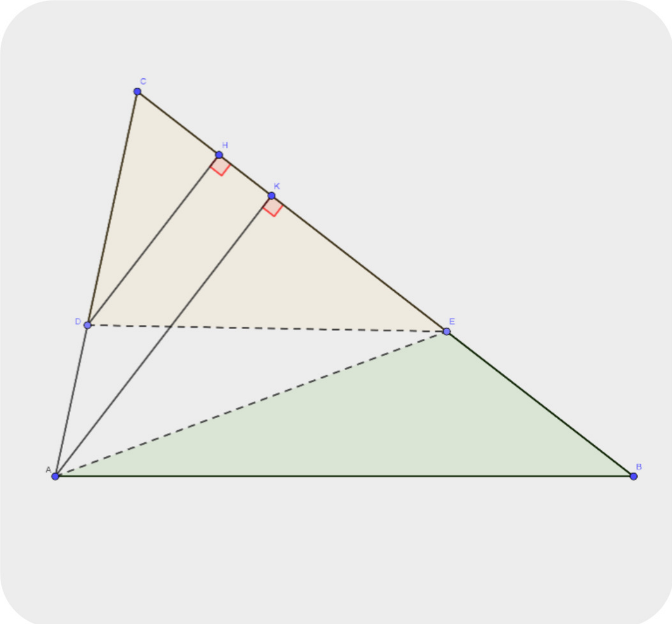
Se fosse $AB \parallel DE \implies [CDE][[ADC]] \sim ABC$ per il corollario al I criterio di similitudine $\implies$

$\implies$ i lati corrispondenti sarebbero in proporzione: $\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{BC} : \overline{CE}$

sostituisco $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 2 + 3 = 5$, $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = 3 + 5 = 8 \implies$

$\implies 5 : 3 = 8 : 5 \implies 3 \cdot 8 = 5 \cdot 5$ per la proprietà fondamentale delle proporzioni $\implies 24 = 25$ che è falso. L'assurdo trovato deriva dall'aver supposto $AB \parallel DE$, quindi $AB \nparallel DE$.

6) Soluzione inviata da Gabriele Iannelli, 3^ B, Liceo Scientifico "Gaetano Rummo", Benevento



Dati:

$D \in AC$
$E \in BC$
$CD = 3$
$AD = 2$
$CE = 5$
$BE = 3$

$$\frac{A_s(ABE)}{A_s(DEC)} = ?$$

$AB \,//\, DE = ?$

(Procedimento: Per calcolare il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e DEC, calcolo singolarmente le aree dei due triangoli. L'area del triangolo ABE, su base BE e altezza AK, equivale a "$(BE \cdot AK): 2$ "; mentre l'area del triangolo DEC, su base CE e altezza DH, equivale a "$(CE \cdot DH): 2$ ". Scrivo AK in funzione di DH).

$Considero\ i\ triangoli\ AKC\ e\ DHC. Essi\ hanno:$

■ $A\hat{C}K\ in\ comune$

■ $C\hat{A}K = C\widehat{D}H$, [$angoli\ corrispondenti$] $per\ il\ criterio\ di\ parallelismo\ (AK/$
$/DH, poich$è $entrambi\ perpendicolari\ a\ BC)$

↓

Conclusione

I triangoli AKC e DHC sono simili, per il primo criterio di similitudine quindi **i lati corrispondenti sono in proporzione**.

Secondo quanto dimostrato precedentemente, è valida la proporzione "$\mathrm{AK: DH} = \mathrm{AC: CD}$", cioè "$\mathrm{AK: DH} = 5: 3$", quindi "$\mathrm{AK} = (\mathrm{DH} \cdot 5): 3$".

Procedendo con il calcolo delle aree (singolarmente), troviamo che:

$$A_s(ABE) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{BE \cdot AK}{2} = \frac{3}{2} AK = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{5}{\cancel{3}} DH = \frac{5}{2} DH$$

$$A_s(DEC) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{CE \cdot DH}{2} = \frac{5}{2} DH$$

Quindi il rapporto (R) tra le aree dei triangoli ABE e DEC equivale a:

$$\boldsymbol{R = \frac{A_s(ABE)}{A_s(DEC)} = \frac{\cancel{\frac{5}{2}}\cancel{DH}}{\cancel{\frac{5}{2}}\cancel{DH}} = 1}$$

(Procedimento: Per dimostrare che AB // DE, sfrutto il secondo criterio di similitudine dei triangoli. Se i triangoli ABC e DEC fossero simili, allora AB sarebbe parallelo a DE [non e' detto poiche' i lati dell'angolo in comune si potrebbero corrispondere in modo diverso]. Se avessero un angolo congruente e i lati che lo comprendono in proporzione, allora sarebbero simili).

$$Considero\ i\ triangoli\ ABC\ e\ DEC. Essi\ hanno:$$
$$\blacksquare\ A\hat{C}B\ in\ comune$$

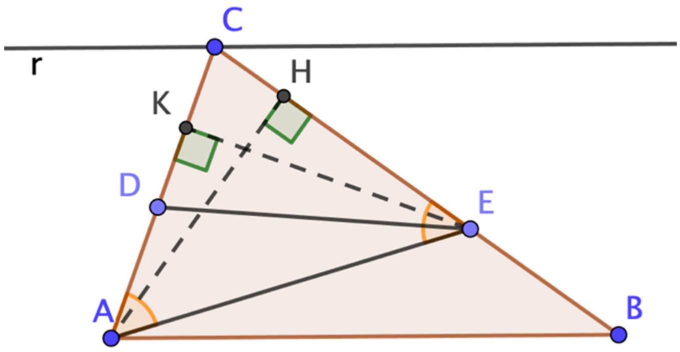
$$Essi\ NON\ hanno:$$
$$\blacksquare\ I\ lati\ corrispondenti\ in\ proporzione\ ("AD: CD = BE: CE"\ non\ \text{è}\ valida, cio\text{è}\ "2: 3 = 3: 5"\ non\ \text{è}\ valida)$$

↓

Conclusione

I triangoli ABC e DEC non sono simili, quindi **AB non è parallelo a DE**.

7) Soluzione proposta da Seppi Davide, Classe 2^D, Liceo "Bertrand Russell", Cles (TN)



Ipotesi: CD = 3, AD = 2, CE = 5 e BE = 3.
a) Determinare il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e DEC.

b) I segmenti AB e DE sono paralleli?

a) Considero il triangolo AEC:

Esso è isoscele perché AC ≅ CE per ipotesi (AD+DC=2+3=CE=5)

⇒ $C\hat{A}E \cong C\hat{E}A$ perché angoli alla base del triangolo isoscele (AEC).

Traccio EK altezza del triangolo CDE relativa al lato CD.

Traccio AH altezza del triangolo AEB relativa al lato EB (essa cade su BC, adiacente EB per ipotesi).

Considero I triangoli AEH e AEK, essi sono ≅ perché hanno:

- Un angolo di 90° ciascuno ($E\hat{K}A$ e $A\hat{H}E$)
- $K\hat{A}E \cong H\hat{E}A$, per dimostrazione precedente
- AE in comune

⇒ essi sono ≅ per il criterio generalizzato di congruenza dei triangoli rettangoli

⇒ KE ≅ AH .

Considero I triangoli DEC e AEB, essi hanno:

- Basi congruenti (EB ≅ DC=3) per ipotesi
- Altezze relative a tali basi congruenti (AH ≅ EK per dimostrazione precedente)

⇒ essi sono equivalenti perché presentano basi ed altezze[relative] rispettivamente congruenti.

⇒ il rapporto tra l'area dei triangoli AEB e DEC è pari a 1.

b) Traccio una retta r parallela ad AB passante per C.
Se DE fosse parallela ad AB (e quindi a r) allora per Talete il rapporto tra AD e EB e quello tra CD e CE dovrebbe essere lo stesso ma AD/EB=2/3 e DC/CE=3/5

⇒ essendo I rapporti diversi le 2 rette non sono parallele.
C.V.D.