FLATlandia

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di dicembre 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

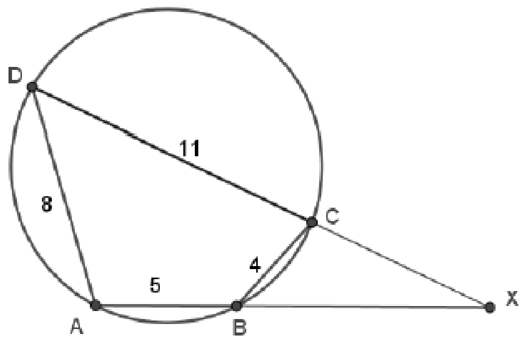
Flatlandia - Problema 1 - 22 dicembre 2022

Il quadrilatero $ABCD$, inscritto in una circonferenza, ha i lati che misurano rispettivamente 5, 4, 11, 8 (vedi figura). Le rette dei lati AB e DC si incontrano nel punto X.

a) Determinare l'area del triangolo BXC.

b) Determinare i raggi delle circonferenze circoscritte rispettivamente ai triangoli AXD e BXC. Cosa si può notare?

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte, la prima da una classe di un Istituto Tecnico e le altre due da classi di Liceo Scientifico.

Il problema pone un quesito relativo ad un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Del quadrilatero si conoscono tutti i lati. Si considera poi un triangolo, esterno al quadrilatero, ottenuto prolungando due lati opposti del quadrilatero stesso. Si chiede di trovare l'area di tale triangolo e il rapporto dei raggi delle circonferenze circoscritte a due opportuni triangoli.

Le risposte arrivate sono tutte corrette. L'unica cosa che ci sentiamo di rilevare, ancora una volta, è una notevole imprecisione, talora, nell'indicazione dei vertici di un triangolo (occorre guardare bene la figura!).

Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
-ITST "Marconi", Campobasso
-Istituto di Istruzione Superiore "Badoni", Lecco
-Liceo Scientifico "Calini", Brescia.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata dalla classe 3ABA-ITST-Marconi, Campobasso

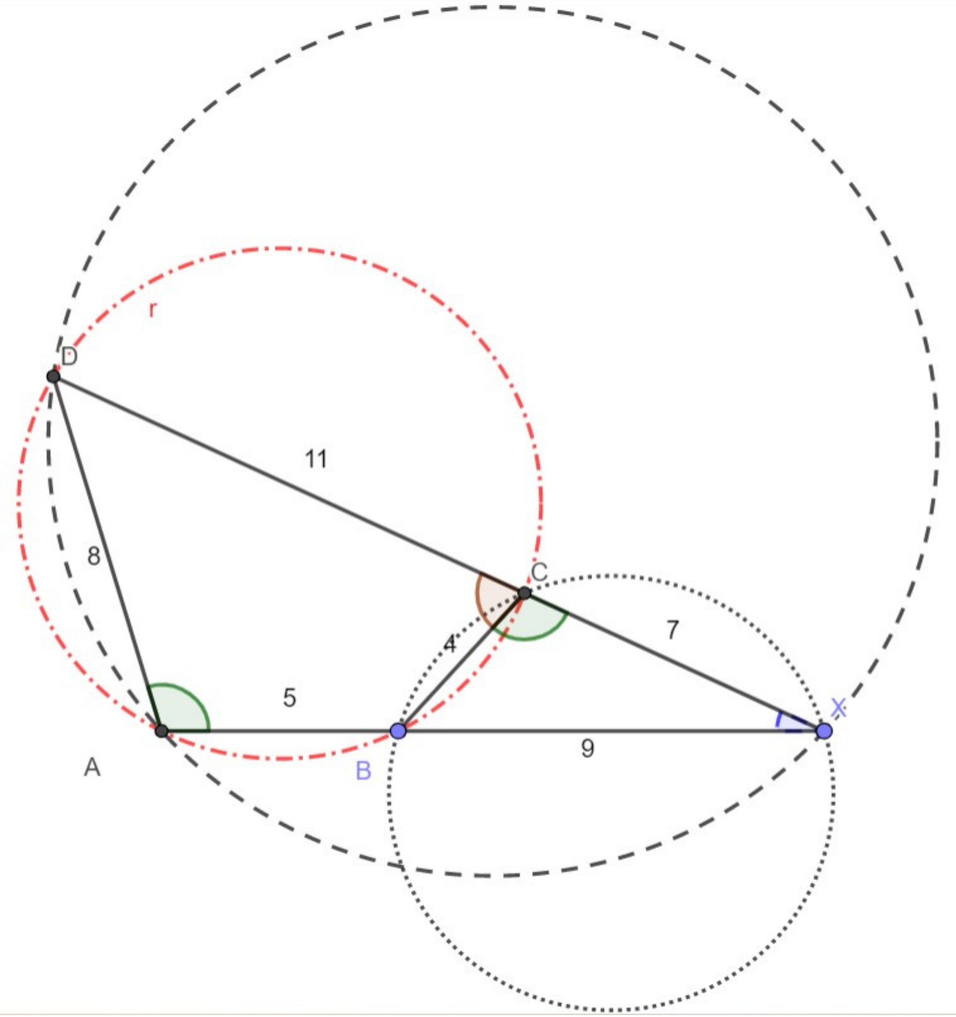
Teoremi, **criteri e definizioni** richiamati:

1) **Criterio di inscrivibilità di un quadrilatero**: *Un quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza se e solo se due angoli opposti sono supplementari.*
2) **Definizione**: *Due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati omologhi in proporzione.*
3) **Primo criterio di similitudine dei triangoli**: *Due triangoli sono simili se hanno due angoli ordinatamente uguali.*
4) **Teorema delle aree**: *Due triangoli simili stanno tra loro come i quadrati costruiti su due lati omologhi*
5) **Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo**: *La lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo si ottiene dividendo il prodotto delle misure di due lati per il doppio della misura dell'altezza relativa al terzo lato R=ab/(2h), con **a** e **b** lati e **h** altezza relativa al terzo lato **c***

   *Continuazione: Dal risultato precedente, che è di grandissimo aiuto nelle applicazioni, se ne ricava un'altra parimenti utile e di aspetto più elegante. Infatti moltiplicando numeratore e denominatore per **c** si ottiene R=abc/(2ch) e ricordando che **c•h** è uguale al doppio dell'area S del triangolo dato, si ha la formula R=abc/(4S) da cui si legge:*

   La lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo si ottiene dividendo il prodotto delle misure dei lati per il quadruplo dell'area.
6) **Formula di Erone per il calcolo delle aree dei triangoli**

   A=[p(p-a)(p-b)(p-c)]^(½), essendo a,b,c i lati e p il semiperimetro del triangolo considerato



Soluzione:

Per l'ipotesi di inscrivibilità e per il teorema 1) nel quadrilatero ABCD si ha: $B\widehat{C}D + D\widehat{A}B = 180°$ *ed essendo anche* $B\widehat{C}D + X\widehat{C}B = 180°$ *segue che* $D\widehat{A}B = X\widehat{C}B$.

Pertanto i triangoli BXC e AXD aventi l'angolo in comune $A\widehat{X}D = B\widehat{X}C$ e gli angoli $D\widehat{A}B = D\widehat{A}X = X\widehat{C}B$ sono simili per la **3)** e quindi per la **2)** si ha

$$\begin{cases} BX : (CX + 11) = BC : AD \\ CX : (BX + 5) = BC : AD \end{cases}$$

Risolvendo il precedente sistema nelle incognite BX e CX si ottiene BX=9 e CX=7

Per la **6)** si ha A(BXC)= $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ e per la **4)** A(AXD)=$4\sqrt{180} = 24\sqrt{5}$

Infine per la **5)**

$$R_c(ADX) = \frac{AX \times XD \times DA}{4S(ADX)} = \frac{2XC \times 2BX \times 2BC}{4 \times 4S(BXC)} = 2\frac{XC \times BX \times BC}{4S(BXC)} = 2R_c(BXC)$$

Tra i raggi delle due circonferenze sussiste dunque la stessa relazione di proporzionalità esistente tra i lati omologhi dei due triangoli.

I suddetti raggi misurano rispettivamente, svolgendo i calcoli, $21\sqrt{5}/5$ e $21\sqrt{5}/10$.

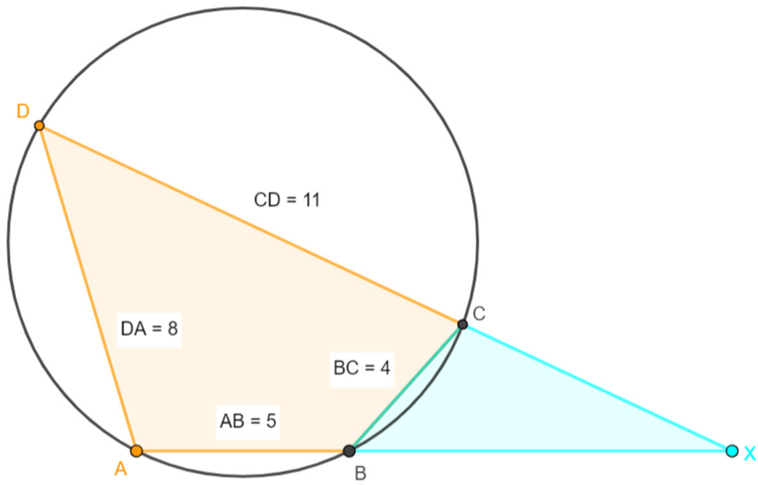
Link alla figura: https://www.geogebra.org/classic/gzqe3fc5

2) Soluzione inviata da Yixia Liu, 4^B, Liceo Scientifico delle Scienze Applicate, I.I.S. A. Badoni, Lecco

Il quadrilatero ABCD, inscritto in una circonferenza, ha i lati che misurano rispettivamente 5, 4, 11, 8 (vedi figura). Le rette dei lati AB e DC si incontrano nel punto X.

a) Determinare l'area del triangolo BXC.
b) Determinare i raggi delle circonferenze circoscritte rispettivamente ai triangoli AXD e BXC. Cosa si può notare?

Motivare le risposte.



Dati :

ABCD è inscritto in una circonferenza

$\boldsymbol{AB = 5}$

$\boldsymbol{BC = 4}$

$\boldsymbol{CD = 11}$

$\boldsymbol{\underline{DA} = 8}$

$\boldsymbol{X = retta\ AB \cap retta\ DC}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A_{BXC}} = ?\ , \boldsymbol{r_{AXD}} = ?\ , \boldsymbol{r_{BXC}} = ?$

Soluzione :

BX è un prolungamento del segmento AB

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CBX} = 180°$$

Essendo ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza, per il teorema, i suoi angoli opposti sono supplementari : $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$.

$\Rightarrow \widehat{ADC} \cong \widehat{CBX}$ perché sono supplementari allo stesso angolo.

Considero i triangoli BXC e AXD :

- hanno $\widehat{AXD}$ in comune
- $\widehat{ADC} \cong \widehat{CBX}$ per la dimostrazione precedente

$\Rightarrow$ per il primo criterio di similitudine $BXC \sim AXD$ e i loro lati sono ordinatamente in proporzione tra di loro. (Occorreva un po' di attenzione!!!)

Perciò viene che :

BC : DA = CX : AX = BX : DX

4 : 8 = CX : (AB+BX) = BX : (CD+CX)

1 : 2 = CX : (5+BX) = BX : (11+CX)

[[Errata: Da questa proporzione si può scriverlo]] [Corrige: Queste proporzioni si possono scrivere] come un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite:

- 1ª eq : $2 \cdot CX = 5 + BX$ (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi)
- 2ª eq : $2 \cdot BX = 11 + CX$

Risolvo il sistema :

- 1ª eq : $BX = 2 \cdot CX - 5$
- 2ª eq : $2 \cdot (2 \cdot CX - 5) = 11 + CX$ (sostituisco BX con quello ricavato nella 1ª eq)

- 1ª eq : $BX = 2 \cdot CX - 5$
- 2ª eq : $3 \cdot CX = 11 + 10$

- 1ª eq : $BX = 2 \cdot 7 - 5 \ = 9$ (sostituisco CX con quello ricavato nella 2ª eq)
- 2ª eq : $CX = 7$

Quindi ottengo che BX = 9 e CX = 7.

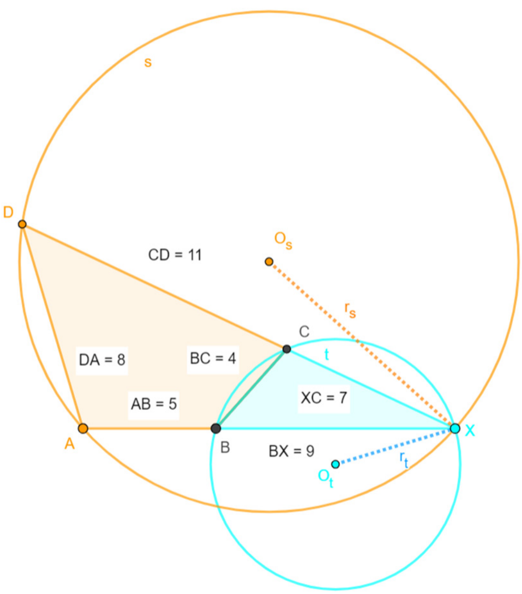
a) <u>Calcolo dell'area</u>

Si calcola il semiperimetro p del triangolo BCX :
$p = \frac{BX+CX+BC}{2} = \frac{9+7+4}{2} = 10.$

Utilizzando la formula di Erone, si ottiene l'area del triangolo BCX :

$$A_{BXC} = \sqrt{p \cdot (p-BX) \cdot (p-CX) \cdot (p-BC)}$$
$$= \sqrt{10 \cdot (10-9) \cdot (10-7) \cdot (10-4)} =$$
$$= \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6} = 6\sqrt{5}.$$

Inoltre, si calcola l'area del triangolo AXD, che serve per il punto b).
Il rapporto di similitudine(k) dei triangoli [[ABC e ACD]] [BCX e ADX] è : $k = \frac{BC}{DA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Poiché il rapporto delle aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine : $\frac{A_{BXC}}{A_{AXD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Allora $A_{AXD} = 4 \cdot A_{BXC} = 4 \cdot 6\sqrt{5} = 24\sqrt{5}.$



b) <u>Calcolo dei raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli</u>

$\boldsymbol{r_{AXD}} = \ \boldsymbol{r_s}$ e $\boldsymbol{r_{BXC}} = \boldsymbol{r_t}$

La regola sul raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo dice che:
$\boldsymbol{r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}}$, ***dove a, b e c sono i 3 lati e A*** è ***l'area***

⇒ il raggio della circonferenza t (circoscritta a

BCX) è :

$$\boldsymbol{r_t} = \frac{\boldsymbol{BX \cdot CX \cdot BC}}{\boldsymbol{4 \cdot A_{BXC}}} = \frac{\mathbf{9 \cdot 7 \cdot 4}}{\mathbf{4 \cdot 6\sqrt{5}}} = \frac{\mathbf{21\sqrt{5}}}{\mathbf{10}}$$

AX = AB+BX = 5+9 = 14
DX = CD+CX = 11+7 = 18

⇒ il raggio della circonferenza s (circoscritta a AXD) è :

$$\boldsymbol{r_s} = \frac{\boldsymbol{AX \cdot DX \cdot DA}}{\boldsymbol{4 \cdot A_{AXD}}} = \frac{\mathbf{14 \cdot 18 \cdot 8}}{\mathbf{4 \cdot 24\sqrt{5}}} = \frac{\mathbf{21\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$$

Si nota che il rapporto tra i due raggi calcolati corrisponde al rapporto di similitudine dei 2 triangoli(k) : $\frac{r_t}{r_s} = \frac{\mathbf{21\sqrt{5}}}{\mathbf{10}} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{21\sqrt{5}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{k}$.

Perciò si può affermare che se due triangoli (1 e 2) sono simili tra loro vale la seguente proporzione :

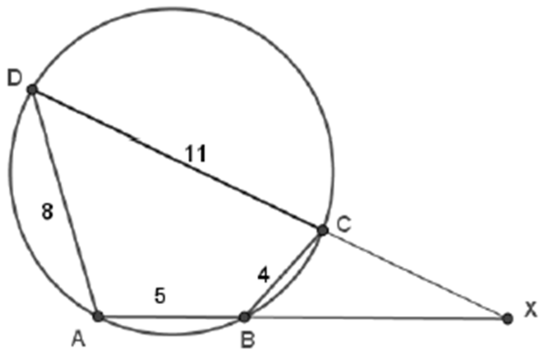
$l_1 : l_2 = r_1 : r_2$, dove l indica il lato del triangolo e r indica il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

3) Soluzione inviata da Luca Fornari, Classe 5^N, Liceo Scientifico Statale "A. Calini", Brescia

Problema:
Il quadrilatero ABCD, inscritto in una circonferenza, ha i lati che misurano rispettivamente 5, 4, 11, 8 (vedi figura). Le rette dei lati AB e DC si incontrano nel punto X.

a) Determinare l'area del triangolo BXC.
b) Determinare i raggi delle circonferenze circoscritte rispettivamente ai triangoli AXD e BXC. Cosa si può notare?

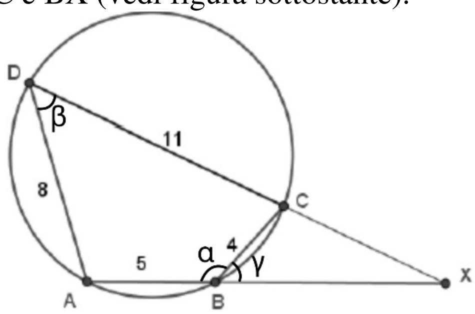
Motivare le risposte.



Risoluzione:

a) Determinare l'area del triangolo BXC

<u>Considero il quadrilatero ABCD:</u>
chiamo con α l'angolo interno in B, β l'angolo interno in D e γ l'angolo esterno a B che ha per lati BC e BX (vedi figura sottostante).



Poiché il quadrilatero ABCD è inscritto in una circonferenza, per il teorema *Condizione necessaria per l'inscrivibilità di un quadrilatero,* allora i suoi angoli opposti sono supplementari. Vale, quindi l'uguaglianza:

$$\alpha + \beta = \pi$$

Inoltre, essendo γ l'angolo esterno di α, allora:

$$\alpha + \gamma = \pi$$

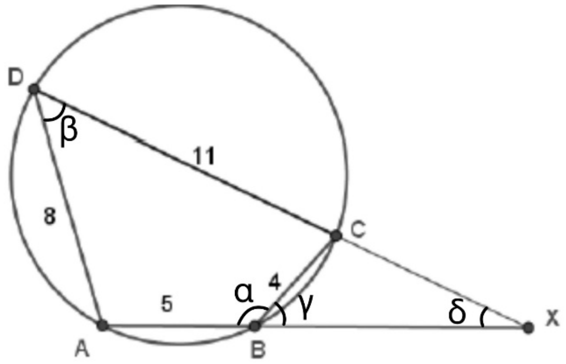
Ponendo in sistema queste due uguaglianze:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi \\ \alpha + \gamma = \pi \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\beta = \gamma$$

Chiamo con δ l'angolo interno del triangolo BXC in X.



Considero i triangoli AXD e BXC:

$\begin{cases} \beta = \gamma \\ \delta \text{ in comune} \end{cases} \Rightarrow AXD \sim BXC \text{ per il } 1° \text{ Criterio di similitudine, in particolare } B\hat{C}X \cong D\hat{A}X \cong \theta$

Sapendo che:

$$AD = 8$$
$$BC = 4$$

Per il teorema *Relazioni fra coppie di triangoli simili*:

$$k = rapporto\ di\ similitudine = \frac{AD}{BC} = \frac{DX}{BX} = \frac{AX}{CX} = 2$$

$$k^2 = \frac{A_{AXD}}{A_{BXC}} = 4$$

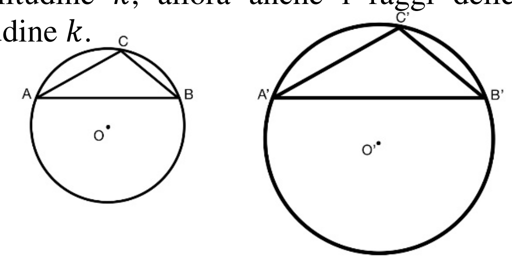
Dimostrazione utile per la risoluzione del problema:

Teorema 1:

Se due triangoli sono simili e hanno rapporto di similitudine k, allora anche i raggi delle circonferenze circoscritte a questi hanno rapporto di similitudine k.

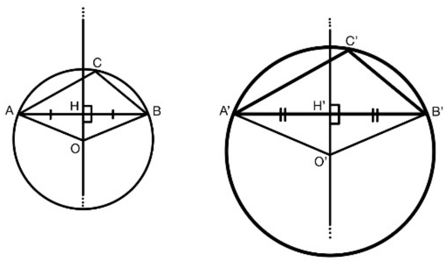
$Hp: ABC \sim A'B'C', k = rapporto\ di\ similitudine$

$Th: \frac{OA}{O'A'} = k$



Dimostrazione

[[Parte da omettere: Costruzione: traccio i segmenti OA, OB,$O'A'$ e $O'B'$. Poiché il circocentro di un triangolo è il punto di intersezione dei suoi assi, traccio l'asse del lato AB e $A'B'$ e chiamo



rispettivamente H e H' il punto di intersezione tra i due.

Considero gli angoli $A\hat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$:

$$\begin{cases} A\hat{C}B \cong A'\widehat{C'}B' \textit{poiché per ipotesi } ABC \sim A'B'C' \\ A\hat{O}B \cong 2A\hat{C}B \textit{ poichè è l'angolo al centro che insiste sulla corda } AB \\ A'\widehat{O'}B' \cong 2A'\widehat{C'}B' \textit{ poichè è l'angolo al centro che insiste sulla corda } A'B' \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}B \cong A'\widehat{O'}B'$$

Considero i triangoli AOH e $A'O'H'$:

$$\begin{cases} A\hat{O}H \cong A'\widehat{O'}H' \textit{poiché l'asse di } AB \textit{ e } A'B' \textit{è anche la bisettrice di } A\hat{O}B \textit{ e } A'\widehat{O'}B' \\ A\hat{H}O \cong A'\widehat{H'}O' \textit{poiché entrambi retti} \end{cases} \Rightarrow AOH \sim A'O'H' \textit{per il 1° Criterio di similitudine}$$

In particolare:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = k \textit{ per ipotesi} \\ AB = 2AH \textit{ per costruzione} \\ A'B' = 2A'H' \textit{per costruzione} \end{cases} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

Concludiamo dicendo:

$$\begin{cases} AOH \sim A'O'H' \textit{per precedente dimostrazione} \\ \frac{AH}{A'H'} = k \textit{ per precedente dimostrazione} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{O'A'} = k \textit{ per il teorema "Relazioni fra coppie di triangoli simili"}$$

c.v.d.]]

[Osservazione: Basta usare la formula per trovare il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo, formula usata per rispondere al punto b)].

Alla luce di questa dimostrazione:

Tenendo conto della *Figura 1* possiamo dire che:

$r_{AXD} = 2r_{BXC} = r$ [quest'ultimo r non è quello che viene usato nel seguito].

Inoltre, tengo conto della relazione:

$$\frac{AX}{CX} = \frac{5 + BX}{CX} = 2$$

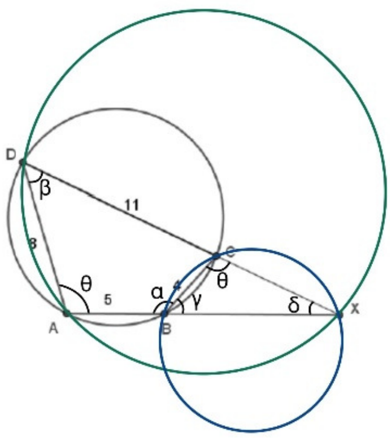


Figura 1

Determiniamo ora il valore di BX e CX:

Per il *Teorema della corda*, tenendo conto della *Figura 1*:

$$\begin{cases} BX = 2r \sin\theta \\ DX = 4r \sin\theta \\ AD = 11 + CX \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} BX = 2r \sin\theta \\ 11 + CX = 4r \sin\theta \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{BX}{2r} \\ \sin\theta = \dfrac{11 + CX}{4r} \end{cases} \Rightarrow \frac{BX}{2r} = \frac{11 + CX}{4r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{BX}{2r} = \dfrac{11 + CX}{4r} \\ CX = \dfrac{5 + BX}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BX}{2r} = \frac{11 + \frac{5 + BX}{2}}{4r}$$

Risolvo l'equazione in funzione di BX:

$$\frac{BX}{2r} = \frac{11 + \frac{5 + BX}{2}}{4r}$$

$$2BX = 11 + \frac{5 + BX}{2}$$

$$4BX = 22 + 5 + BX$$

$$3BX = 27$$
$$BX = 9$$
$$CX = \frac{5 + BX}{2} = \frac{5 + 9}{2} = 7$$

Calcolo il semiperimetro del triangolo BXC:

$$p = \frac{BC + CX + BX}{2} = \frac{4 + 7 + 9}{2} = 10$$

Con la *Formula di Erone* calcolo l'area del triangolo BXC:

$$A_{BXC} = \sqrt{p(p - BC)(p - CX)(p - BX)} = \sqrt{10(10 - 4)(10 - 7)(10 - 9)} = \sqrt{10 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

b) Determinare i raggi delle circonferenze circoscritte rispettivamente ai triangoli AXD e BXC. Cosa si può notare?

Data una circonferenza circoscritta ad un triangolo, vale il teorema: *il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è dato dal rapporto tra la misura dei tre lati del triangolo e il quadruplo dell'area dello stesso.*

$$r_{AXD} = \frac{AD \cdot DX \cdot AX}{4A_{AXD}} = \frac{AD \cdot DX \cdot AX}{4(4A_{BXC})} = \frac{8 \cdot 18 \cdot 14}{4(4 \cdot 6\sqrt{5})} = \frac{2016}{96\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$$
$$r_{BXC} = \frac{BC \cdot BX \cdot CX}{4A_{BXC}} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{63}{6\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

Si può notare che il valore dei raggi delle circonferenze circoscritte [[dei]] [ai] due triangoli AXD e BXD è coerente con quanto detto nel *Teorema 1*, ovvero che:

$$r_{AXD} = 2r_{BXC} \, .$$