FLAT*landia*

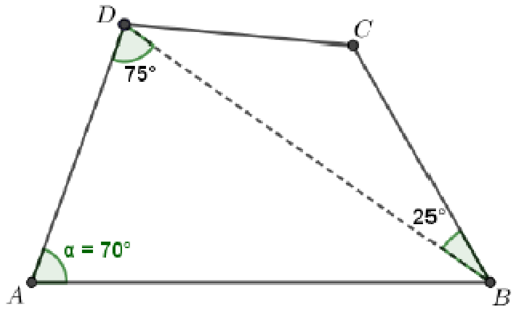
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di novembre 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 5 - 26 novembre 2022

Nel quadrilatero $ABCD$, il lato AD è congruente al lato BC, l'angolo in A misura $70°$, l'angolo $A\hat{D}B$ misura $75°$ e l'angolo $D\hat{B}C$ misura $25°$ (vedi figura).
Determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{D}B$.
Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto quattro risposte, tre da classi di Liceo Scientifico e una da una classe di un Istituto Tecnico.

Il problema poneva un quesito relativo a un quadrilatero con due lati opposti congruenti di cui si conoscevano un angolo e altri due formati da una diagonale con i lati opposti congruenti. Si dovevano trovare tutti gli angoli del quadrilatero.

Le risposte giunte sono tutte sostanzialmente corrette. In una di queste è stato scelto un approccio trigonometrico arrivando al risultato mediante l'arcotangente di una certa espressione (complicata) indicandone subito il valore finale, come se questo fosse di immediata determinazione. Le altre risposte hanno scelto una via più geometrica, comunque più naturale.

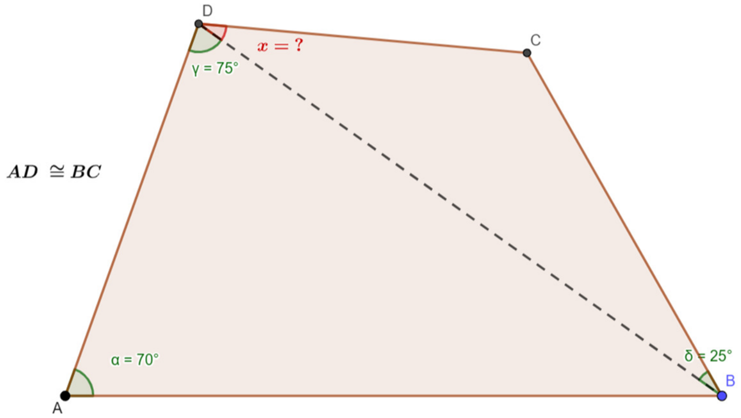
Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
-Istituto di Istruzione Sup. Badoni, Lecco
-Liceo Archimede, Messina, 2 soluzioni
-ITST Marconi, Campobasso

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Liu Yixia, 4^B Liceo Scientifico delle Scienze Applicate, I.I.S. A. Badoni, Lecco

Nel quadrilatero ABCD, il lato AD è congruente al lato BC, l'angolo in A misura 70°, l'angolo ADB misura 75° e l'angolo DBC misura 25° (vedi figura). Determinare l'ampiezza dell'angolo CDB. Motivare la risposta.



Dati :

$$\underline{AD} \cong \underline{BC}$$
$$\widehat{BAD} = 70° \qquad \Rightarrow \widehat{CDB} = ?$$
$$\widehat{ADB} = 75°$$
$$\widehat{DBC} = 25°$$

Risoluzione :

$$\widehat{CDB} = x \text{ , con } 0° < x < 90°$$
$$\underline{BC} = \underline{AD} = a, \text{con } a \in \mathbb{R}_0^{\;+}$$

Poiché la somma degli angoli interni dei triangolo è pari a 180°:

- nel triangolo ABD, trovo che

$$\widehat{ABD} = 180° - \widehat{BAD} - \widehat{ADB} = 180° - 70° - 75° = 35°$$

- nel triangolo BCD, trovo che

$$\widehat{BCD} = 180° - \widehat{DBC} - x = 180° - 25° - x = 155° - x.$$

Considero il triangolo ABD e applico il teorema del seno :

$$\frac{\underline{AD}}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{\underline{BD}}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 35°} = \frac{\underline{BD}}{\sin 70°} \Rightarrow \text{da cui ricavo } \underline{BD} = \frac{a \cdot \sin 70°}{\sin 35°}.$$

<u>Primo modo : BD=BD</u>

Considero il triangolo BCD e applico il teorema del seno :

$$\frac{\underline{BC}}{\sin x} = \frac{\underline{BD}}{\sin \widehat{BCD}} \Rightarrow \frac{a}{\sin x} = \frac{\underline{BD}}{\sin (155°-x)} \Rightarrow \text{da cui ricavo } \underline{BD} = \frac{a \cdot \sin (155°-x)}{\sin x}.$$

A questo punto si eguagliano le due equazioni ($\underline{BD} = \underline{BD}$):

$$\frac{a \cdot \sin 70°}{\sin 35°} = \frac{a \cdot \sin (155°-x)}{\sin x} \quad \text{*semplifico a}$$

$$\frac{\sin 70°}{\sin 35°} = \frac{\sin 155° \cdot \cos x - \cos 155° \cdot \sin x}{\sin x} \quad \text{*formula di sottrazione del seno}$$

$$\frac{\sin 70°}{\sin 35°} = \frac{\sin 155°}{\tan x} - \cos 155°$$

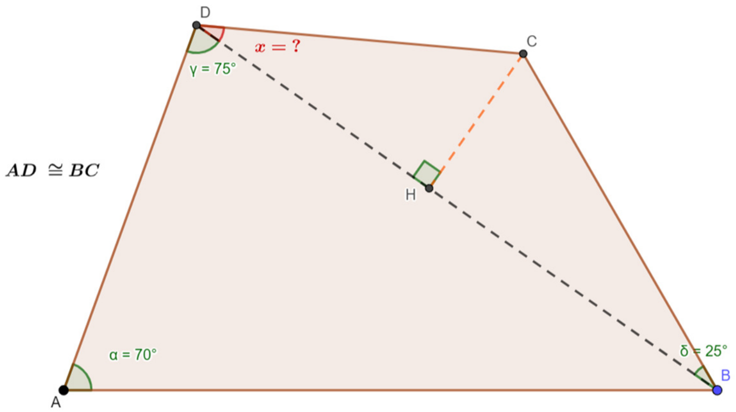
$$tan\ x = \frac{sin\ 155°}{\frac{sin\ 70°}{sin\ 35°} + cos\ 155°} \ \Rightarrow \ x = tan^{-1}\left(\frac{sin\ 155°}{\frac{sin\ 70°}{sin\ 35°} + cos\ 155°}\right) = 30° \ \rightarrow \ \boldsymbol{accettabile}$$

[si doveva spiegare perché si ottiene 30°, evitando, se possibile, l'uso della calcolatrice]

$$\Rightarrow \widehat{CDB} = \ x = 30°$$

Secondo modo : BD=BH+DH

Traccio l'altezza CH relativa alla base DB : CH⊥DB ⇒ BCH e CDH sono triangoli rettangoli.



$\underline{BD} = \underline{BH} + \underline{DH}$, dove:

- $\underline{BD} = \frac{a \cdot sin\ 70°}{sin\ 35°}$, ricavato precedentemente (teorema del seno applicato al triangolo ABD);
- $\underline{BH} = \underline{BC} \cdot cos\ \widehat{CBH} = a \cdot cos\ 25°$, ricavato dalla definizione del coseno

  $(cos\alpha = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa} \Rightarrow cos\ \widehat{CBH} = \frac{\underline{BH}}{\underline{BC}})$
- $\underline{CH} = \underline{BC} \cdot sin\ \widehat{CBH} = a \cdot sin\ 25°$, ricavato dalla definizione del seno

  $(sin\alpha = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa} \Rightarrow sin\ \widehat{CBH} = \frac{\underline{CH}}{\underline{BC}})$
- $\underline{DH} = \frac{\underline{CH}}{tan\ \widehat{CDB}} = \frac{a \cdot sin\ 25°}{tan\ x}$, per il secondo teorema dei triangoli rettangoli (della trigonometria)

Quindi $\underline{BD} = \underline{BH} + \underline{DH}$:

$\frac{a \cdot sin\ 70°}{sin\ 35°} = a \cdot cos\ 25° + \frac{a \cdot sin\ 25°}{tan\ x}$ * semplifico a

$$\frac{sin\ 70°}{sin\ 35°} - cos\ 25° = \frac{sin\ 25°}{tan\ x}$$

$$tan\ x = \frac{sin\ 25°}{\frac{sin\ 70°}{sin\ 35°} - cos\ 25°} \ \Rightarrow \ x = tan^{-1}\left(\frac{sin\ 25°}{\frac{sin\ 70°}{sin\ 35°} - cos\ 25°}\right) = 30° \ \rightarrow \ \boldsymbol{accettabile}$$

[si doveva spiegare perché si ottiene 30°, evitando, se possibile, l'uso della calcolatrice]

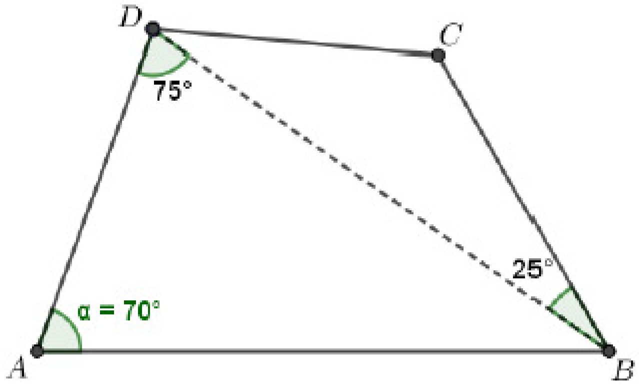
$\Rightarrow \widehat{CDB} = \ x = 30°$.

2) Soluzione inviata da Davide Giuseppe Bonanno, Classe IIC, Liceo Archimede, Messina

---

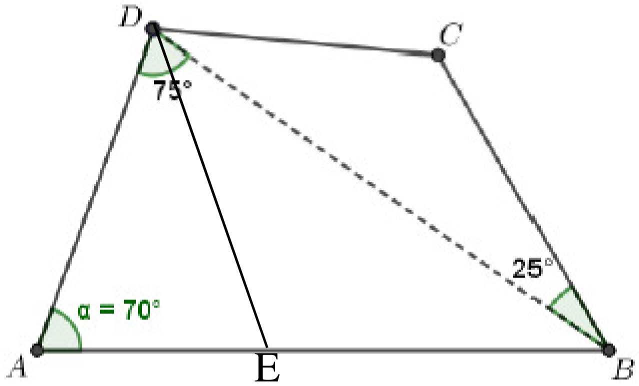
Enunciato del problema:

Nel quadrilatero ABCD, il lato AD è congruente al lato BC, l'angolo in A misura 70°, l'angolo $\widehat{ADB}$ misura 75° e l'angolo $\widehat{DBC}$ misura 25°. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CDB}$. Motivare la risposta.



Dimostrazione:

DE ≅ AD (Costruzione) → $\widehat{AED}$ = 70° (Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti)



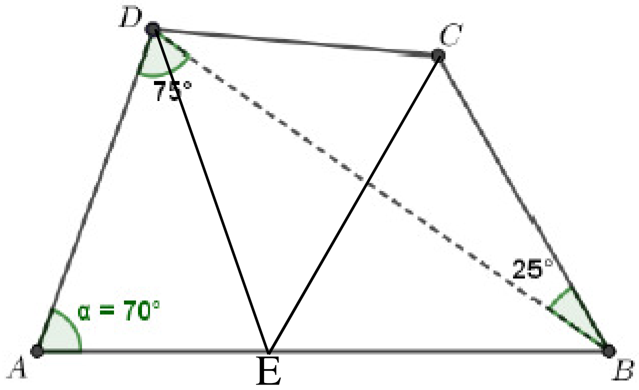
$\widehat{DBA}$ = 180° - (α + $\widehat{ADB}$) = 35° (La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°)

$\widehat{EDB}$ = (180° - (180° - $\widehat{AED}$ + $\widehat{DBA}$) = 35° ($\widehat{AED}$ e $\widehat{DEB}$ supplementari)

$\widehat{EDB}$ = 35° ∧ $\widehat{DBA}$ = 35° → $\widehat{EDB}$ ≅ $\widehat{DBA}$ → EB ≅ DE ≅ AD ≅ BC (Un triangolo con gli angoli alla base congruenti è isoscele)

EB ≅ BC → $\widehat{BEC}$ ≅ $\widehat{BCE}$ (Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti)

$\widehat{EBC}$ ≅ $\widehat{EBD}$ + $\widehat{CBD}$ = 35° + 25° = 60°

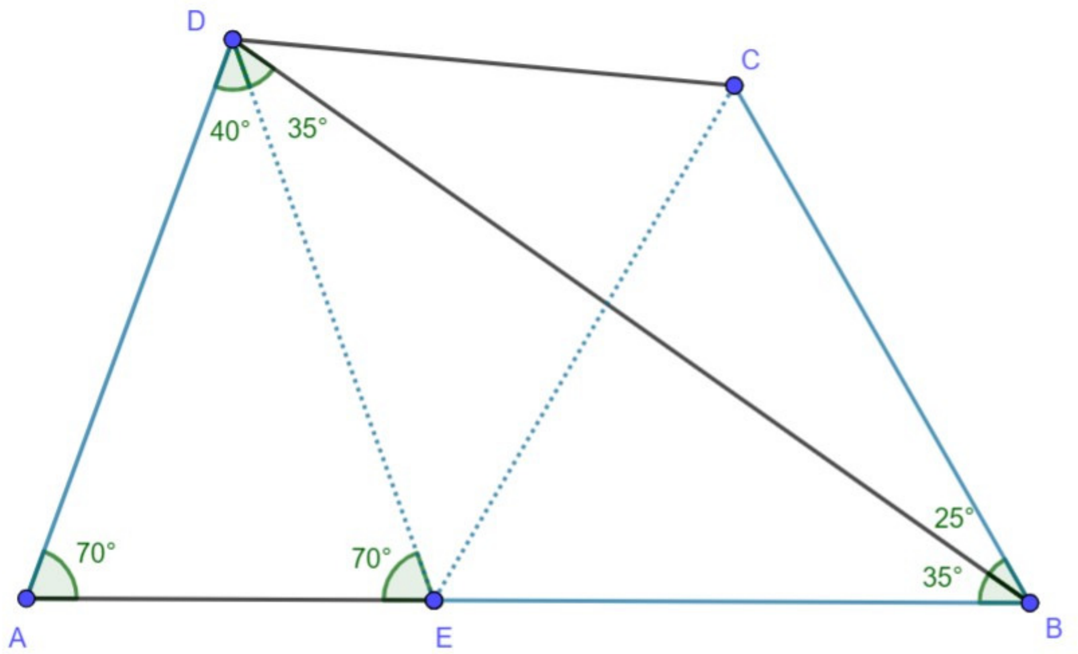


$\widehat{BEC} = \frac{180° - \widehat{EBC}}{2}$ = 60° → EB≅BC≅CE (Un triangolo con 3 angoli di 60° è equilatero)
EC ≅ BC ∧ ED≅BC → EC≅ED (Proprietà transitiva della congruenza)
EC≅ED →$\widehat{EDC} \cong \widehat{ECD}$ (Angoli alla base di triangolo isoscele)
$\widehat{DEC}$ = 180° - ($\widehat{AED} + \widehat{BEC}$) = 180° - (70° + 60°) = 180° - 130° = 50°
$\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = \frac{180° - \widehat{DEC}}{2} = \frac{180° - 50°}{2}$ = 65°
$\widehat{CDB} = \widehat{EDC} - \widehat{EDB}$ = 65° - 35° = 30°

Risposta:

L'angolo $\widehat{CDB}$ misura 30°

3) Soluzione inviata dalla classe 3ABA-ITST-Marconi, Campobasso



Si prenda su AB un punto E tale che il triangolo AED sia isoscele sulla base AE
Essendo 180° la somma degli angoli interni di un triangolo risulta $E\widehat{D}A = 40°$ (180°-2*70°)

Per differenza di angoli si deduce che $B\widehat{D}E = 35°$ (75°-40°)

Il triangolo EBD risulta essere isoscele sulla base BD avendo gli angoli alla base congruenti

Dunque si ha:

AD=DE=EB per costruzione,

AD=BC per ipotesi,

e quindi, per la proprietà transitiva della congruenza EB=BC, da cui segue che il triangolo EBC è equilatero [perché ha un angolo di 60°].

Pertanto, per differenza di angoli si ha $C\widehat{E}D = 50°$ (180°-70°-60°) e nel triangolo isoscele sulla base CD gli angoli alla base misurano $(180° - 50°)/2 = 65°$

Sempre per differenza di angoli si ha

$$C\widehat{D}B = C\widehat{D}E - B\widehat{D}E = 65° - 35° = 30°$$

$$B\widehat{C}D = B\widehat{C}E + E\widehat{C}D = 60° + 65° = 125°$$

[[Questa parte si poteva omettere.

Osservazione:

siamo giunti alla stessa conclusione mediante rotazione antioraria di 105°(supplementare di 75°) del triangolo ABD intorno al punto D, come conferma la seguente costruzione:

https://www.geogebra.org/classic/qhdh4duk

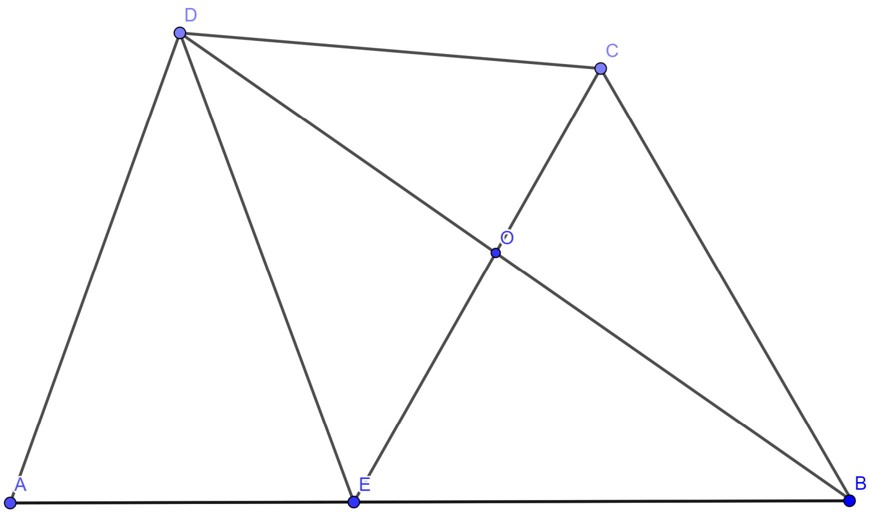
Da cui, per differenza di angoli, si ricava:

$C\widehat{D}B = 180° - 2 * 75° = 30°$]]

4) Soluzione inviata da ANDREA GALLETTA CLASSE 2 C LICEO STATALE "ARCHIMEDE" SCIENTIFICO E LINGUISTICO MESSINA

<u>Hp</u>
$B\widehat{D}A = 75°$
$D\widehat{A}B = 70°$
$D\widehat{B}C = 25°$
$DA \cong BC$

<u>Th</u>
$C\widehat{D}B = ?$



Conoscendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°, si calcola l'ampiezza dell'angolo $D\widehat{B}A$.

$$D\widehat{B}A \cong 180° - D\widehat{A}B - B\widehat{D}A = 180° - 70° - 75° = 35°$$

Si individua sulla base AB un punto E tale che il segmento DE sia congruente al segmento DA. Si osserva che il triangolo ADE è isoscele, poiché ha due lati congruenti.

$$DA \cong DE \rightarrow ADE \text{ è isoscele} \rightarrow D\widehat{A}E \cong A\widehat{E}D \text{ (angoli alla base di un triangolo isoscele)}$$

Essendo $D\widehat{A}E$ pari a 70°, si avrà che:

$$D\widehat{A}E \cong A\widehat{E}D = 70°$$

Considerando che la somma degli angoli interni di AED è 180°, risulta che l'angolo al vertice sarà:

$$E\widehat{D}A \cong 180° - D\widehat{A}E - A\widehat{E}D = 180° - (2 \cdot 70°) = 40°$$

Si può, quindi, calcolare l'angolo $E\widehat{D}B$:

$$B\widehat{D}E + E\widehat{D}A \cong B\widehat{D}A$$

$$B\widehat{D}E \cong B\widehat{D}A - E\widehat{D}A = 75° - 40° = 35°$$

Poiché gli angoli $E\widehat{B}D$ e $B\widehat{D}E$ sono congruenti, segue che EBD è isoscele. Si avrà quindi:

$$E\widehat{B}D \cong B\widehat{D}E \rightarrow EBD \text{ è isoscele} \rightarrow EB \cong DE$$

Si traccia il segmento che congiunge i punti E e C e incontra la diagonale DB nel punto O.

$$E\widehat{B}C \cong E\widehat{B}O + O\widehat{B}C = 35° + 25° = 60°$$

Si forma il triangolo EBC, triangolo isoscele con angolo al vertice $E\widehat{B}C$ pari a 60°. Essendo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti. Di conseguenza:

$$B\widehat{C}E \cong C\widehat{E}B \cong \frac{180° - E\widehat{B}C}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Un triangolo con tutti gli angoli congruenti, nonché pari a 60°, è equilatero.

$$C\widehat{E}B \cong E\widehat{B}C \cong B\widehat{C}E \rightarrow CE \cong EB \cong BC$$

Si crea, seguendo questo ragionamento, un altro triangolo isoscele, DEC. Si calcola l'ampiezza del suo angolo al vertice $D\widehat{E}C$.

$$D\widehat{E}C \cong A\widehat{E}B - A\widehat{E}D - C\widehat{E}B = 180° - 70° - 60° = 50°$$

Si possono, perciò, calcolare gli angoli alla base del triangolo isoscele DEC.

$$C\widehat{D}E \cong E\widehat{C}D \cong \frac{180° - D\widehat{E}C}{2} = \frac{180° - 50°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

Si calcola, infine l'ampiezza di $C\widehat{D}O$.

$$O\widehat{D}E + C\widehat{D}O \cong C\widehat{D}E$$

$$C\widehat{D}O \cong C\widehat{D}E - O\widehat{D}E = 65° - 35° = 30° \ .$$