FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di maggio 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

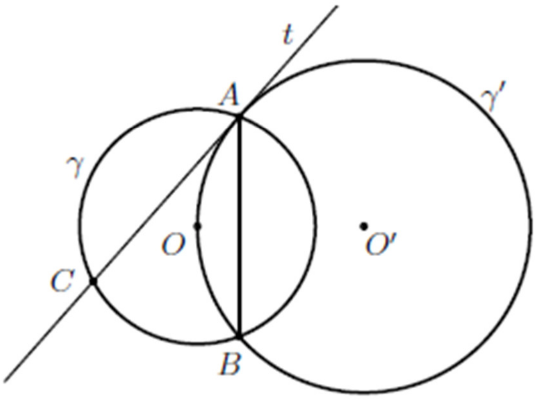
Problema - 5 - 26 maggio 2025

Sono date due circonferenze γ e γ' che si intersecano nei punti A e B, con γ' passante per il centro di γ.

Sia t la retta tangente a γ' nel punto A e C l'ulteriore punto di intersezione di t con γ (vedi figura).

a) Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele.

b) Tracciare la retta CB e indicare con D l'ulteriore punto di intersezione di questa retta con γ'. Dimostrare che il triangolo ACD è simile al triangolo ABC.



Commento

Il problema richiedeva inizialmente di intersecare due circonferenze, la prima delle quali passante per il centro dell'altra. Detti A e B i punti di intersezione di tali circonferenze si doveva poi considerare la tangente in A alla prima circonferenza e indicare con C l'ulteriore punto di intersezione di tale tangente con l'altra circonferenza. Bisognava allora dimostrare che il triangolo ABC era isoscele.
Successivamente, occorreva provare la similitudine tra ABC e il triangolo CAD, essendo D l'ulteriore intersezione (diversa da B) di CB con la prima circonferenza.

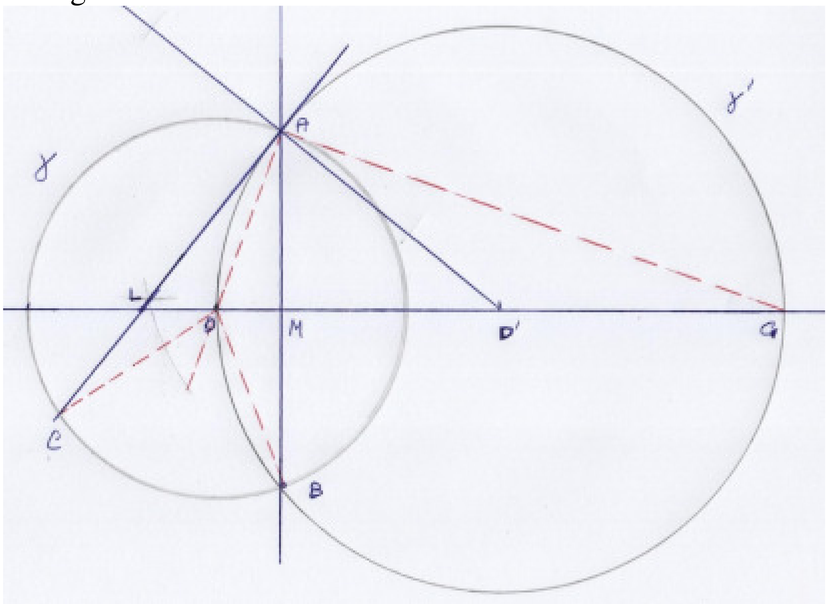
Due delle soluzioni arrivate sono completamente corrette, mentre la terza contiene un'affermazione chiaramente errata nella prima parte, mentre è corretta nella seconda.
Sono arrivate tre soluzioni, dalle seguenti scuole:
-Liceo Classico "Don Mazza", Verona
-ITG. "G.G. Marinoni", Udine
-Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata da Ettore Costa - Terzo anno Liceo Classico "Don Mazza"- Verona

Considero il triangolo O'AL, rettangolo in Â, e il triangolo rettangolo AML.
Sono simili perché triangoli rettangoli con l' angolo M$\overset{\frown}{L}$A in comune: in particolare l' angolo LÂM è uguale all' angolo LÔ'A.

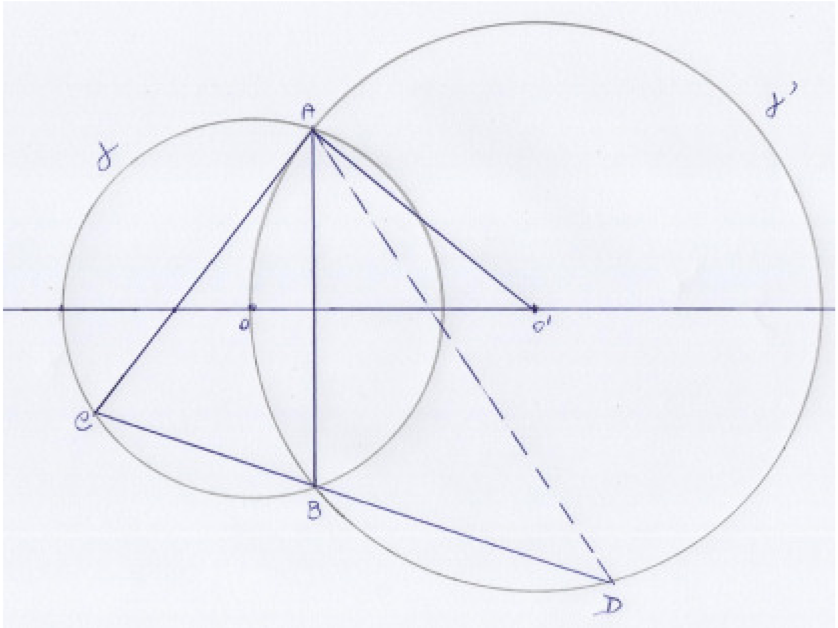


<u>Dimostro che la semiretta OA è bisettrice dell' angolo MÂL.</u>

Nella circonferenza γ' considero la corda OA e la semiretta AC tangente a γ': individuano l'angolo alla circonferenza OÂL che sottende l' arco di circonferenza OA.
Anche l' angolo alla circonferenza OĜA insiste sul medesimo arco di circonferenza OA, perciò OĜA = OÂL.
L' angolo al centro OÔ'A insiste sul medesimo arco di circonferenza OA ed è di ampiezza doppia rispetto ad OĜA.
Perciò OÔ'A = MÂL = 2 OÂL: OA è bisettrice dell' angolo MÂL.

<u>Dimostro che AC = AB.</u>

Traccio i raggi OC, OA, OB: i triangoli OCA ed OAB sono isosceli perché i segmenti OC, OA, OB, sono raggi della circonferenza γ; inoltre CÂO = OÂB e di conseguenza tutti gli angoli dei due triangoli isosceli sono uguali. Per il primo criterio di uguaglianza i triangoli OCA ed OAB sono uguali.
Quindi CA = BA ed il triangolo CAB è isoscele.



<u>Dimostro che il triangolo ACD è simile al triangolo CAB.</u>

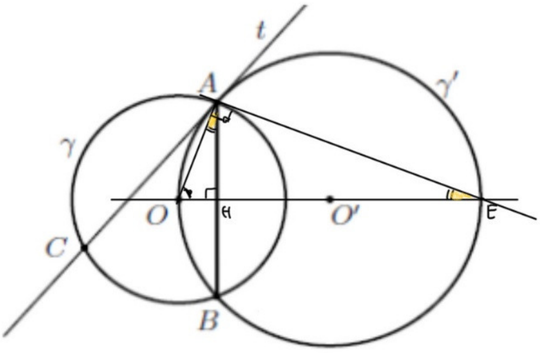
Nella circonferenza γ' la corda AB e la semiretta AC, tangente a γ' in A, individuano l' angolo alla circonferenza CÂB, che insiste sull' arco di circonferenza AOB.
Anche l' angolo alla circonferenza $B\hat{D}A$ insiste sul medesimo arco AOB.
Perciò $C\hat{D}A$ = CÂB.
L' angolo $D\hat{C}A$ è comune ai due triangoli ACD e CAB.
Poiché tutti gli angoli sono uguali, i triangoli sono simili ed anche il triangolo CDA è isoscele, CD = AD.

2)Soluzione inviata dal Gruppo di allenamento alle Gare matematiche dell'ITG. "G.G.MARINONI" DI UDINE:

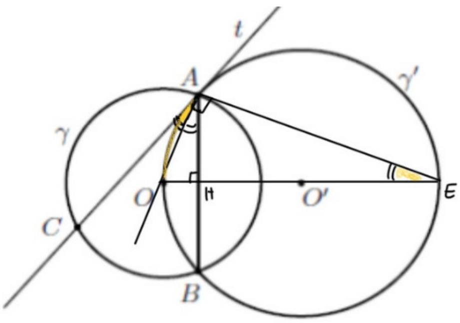
Marangone Irene (1ACAT); Ottogalli Iris (2AGC); Bonzio Elena (2AGC); Bliznakoff Igor (2ACAT); Barnaba Chantal (2ACAT); Toia Jacopo (2BGC); Gorassini Gabriele (3AGEL); Scotti Vittoria (3AGEL); Sfiligoi Yorman (3AGEL); Conace Giulia (3ALGC); Sofia Facchin (3ALGC); Cuth Ruben (5CCAT); Dzitac Kevin (5CCAT).

Ipotesi:	Tesi:
$\gamma \cap \gamma' = \{A, B\}$ circonferenze secanti $O \in \gamma'$ (O centro di γ) $\gamma' \cap t = \{A\}$ (t tangente a γ' in $\{A\}$) $\gamma \cap t = \{C, A\}$ $CB \cap \gamma' = \{D, B\}$	1. **ABC isoscele**: ($\hat{C} = \hat{B}$ ovvero $AC \cong AB$ ovvero *altezza relativa a CB=mediana di CB=bisettrice di $C\hat{A}B$ =asse di CB).* 2. $\boldsymbol{ACD \sim ABC}$.

DIMOSTRAZIONE 1.

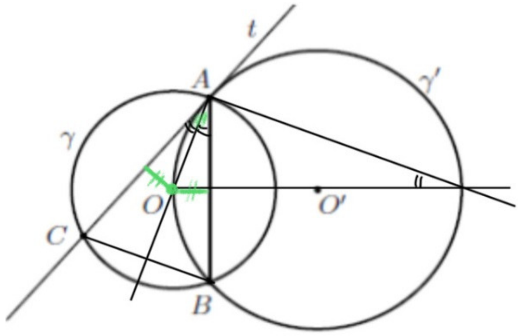


Prolunghiamo il raggio OO', dalla parte di O', fino ad intersecare la circonferenza γ'nel punto E.
Il triangolo OEA è retto in A perché inscritto in una semicirconferenza.
Chiamato H il punto di intersezione fra AB e OO', si ha che $O\hat{H}A = 90°$perché γ e γ'sono secanti.
Consideriamo i triangoli OHA e OEA, essi sono simili per il primo criterio di similitudine, infatti: l'angolo $\hat{O}$ è in comune e $O\hat{H}A \cong O\hat{A}E = 90°$. In particolare si ha $O\hat{A}H \cong A\hat{E}O$ per differenza da $180°$.



Ora, si ha che $C\hat{A}O \cong A\hat{E}O$ perché angoli alla circonferenza (γ') che insistono sullo stesso arco AO.
Essendo $O\hat{A}H \cong A\hat{E}O$ e $C\hat{A}O \cong A\hat{E}O$ allora $O\hat{A}H \cong C\hat{A}O$ per la proprietà transitiva della *congruenza*.

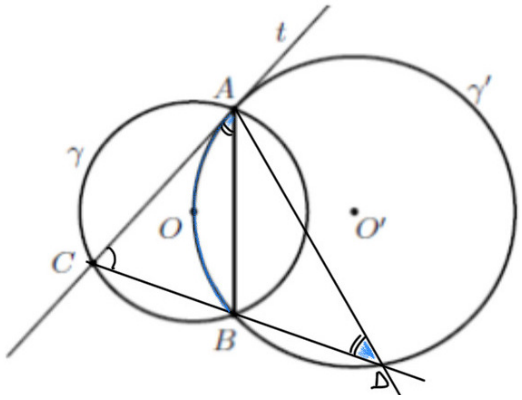
Quindi la retta AO è bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$. Quindi il punto O è equidistante dalle corde AB e AC per la proprietà dei punti della bisettrice di un angolo.



Ne consegue che $AC \cong AB$ perché corde equidistanti dal centro e quindi il triangolo **ABC è isoscele** di base CB. #

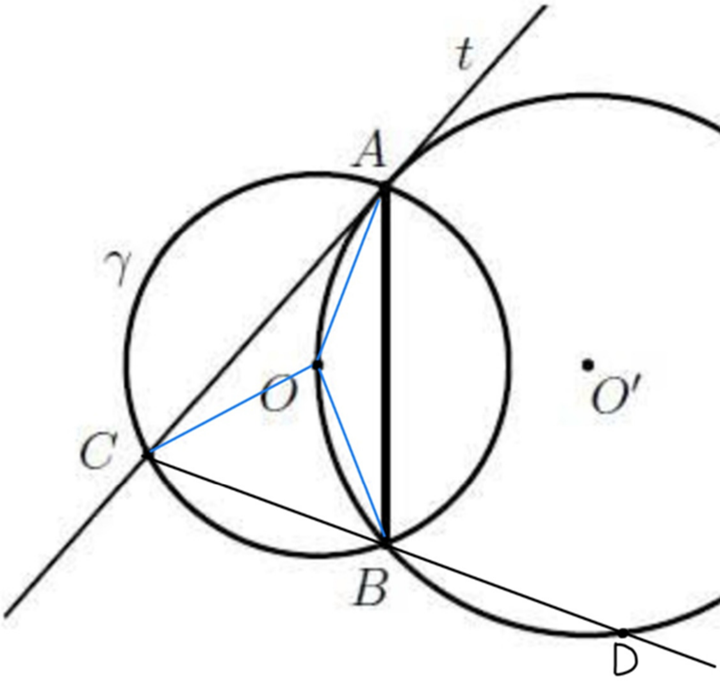
DIMOSTRAZIONE 2.

Consideriamo i triangoli $\boldsymbol{ABC}$ **e** $\boldsymbol{CAD}$, essi sono **simili** per il primo criterio di similitudine, infatti: l'angolo $\hat{C}$ è in comune e $A\widehat{D}C \cong B\hat{A}C$ perché angoli alla circonferenza (γ') che insistono sullo stesso arco AB.#



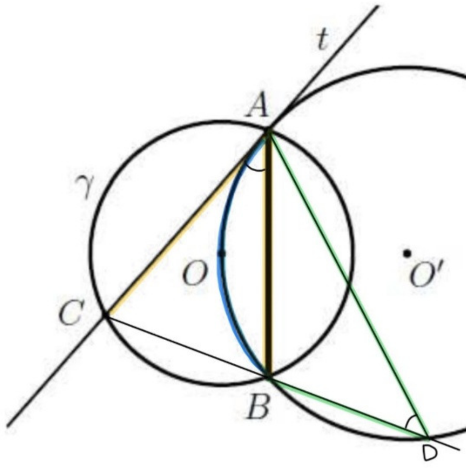
3)Soluzione inviata da
Claudia Mattone, II D, Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

a)
Per dimostrare che il triangolo ABC è isoscele, comincio tracciando i raggi della circonferenza γ: OA, OC e OB.



Osservo, dunque, che il triangolo [OAB] [[ABC]] è isoscele poiché OA ≅ OB ≅ r e che il triangolo COA è isoscele poiché OA ≅ OC ≅ r. Quest'ultimi, essendo due triangoli con i lati obliqui congruenti (r), hanno angoli alla base congruenti. [L'affermazione seguente è palesemente errata].
[[E, perciò, per differenza di angoli congruenti, l'angolo CÔA ≅ BÔA e, per il 1° criterio di congruenza dei triangoli, △COA ≅ △BOA.]]
Quindi possiamo affermare che CA ≅ AB e che △ABC è isoscele.

b)
Consideriamo i due angoli alla circonferenza (rispetto a γ') CÂB e ADB. Questi sono congruenti perché entrambi insistono sull'arco AB (evidenziato in blu): CÂB ≅ ADB.
Inoltre, i triangoli △ACD e △ABC hanno in comune l'angolo ACB.
Perciò, per il 1° criterio di similitudine dei triangoli, △ACD ~ △ABC.


t
A
γ'
γ
O
O'
C
B
D