FLAT*landia*

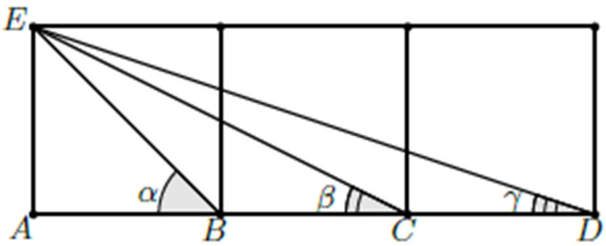
Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di dicembre 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 1° al 22 dicembre 2025)

Considerati tre quadrati tra loro congruenti disposti come in figura, tracciare i segmenti BE, CE e DE. Indicare con α, β e γ le ampiezze rispettivamente degli angoli $\widehat{ABE}$, $\widehat{ACE}$ e $\widehat{ADE}$
Dimostrare che $\alpha = \beta + \gamma$.
Risolvere il problema anche senza l'uso della trigonometria.



Commento
Il problema proposto per dicembre è molto noto nelle gare matematiche dove si chiama "Problema dei tre quadrati" (si trova anche citato in un libro di Martin Gardner). Si chiedeva di risolvere il problema anche senza l'uso della Trigonometria, ma non tutti gli studenti sono riusciti a risolverlo in questo modo, forse perché occorreva avere un po' di fantasia e sulla figura e ruotare uno dei segmenti indicati nel testo di un angolo opportuno.

Abbiamo ricevuto sei risposte da studentesse e studenti delle seguenti scuole:
- I.I.S. Liceo Scientifico "G. Bruno-R. Franchetti", Mestre Venezia (VE)
- Liceo Scientifico "L.B. Alberti", Cagliari
- ITG. "G.G. Marinoni", Udine
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Milano
- Liceo Scientifico "G. Stampacchia", Tricase (LE)
- Liceo Ginnasio "Botta", Ivrea (TO)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della privacy mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno inviato le soluzioni.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata da: Gianmaria O.- LS, Classe 4E, I.I.S. "G. Bruno e R. Franchetti" Mestre-VE

[Commento: La prima soluzione proposta è prolissa oltre che poco leggibile (non viene usato un editor per le equazioni e per le formule…), ma è accettabile.
La seconda soluzione, che fa uso della similitudine, contiene diversi errori anche se l'intuizione è corretta. Prima di inviare la soluzione occorre rileggere quel si scrive!!!]

RISOLUZIONE PER VIA TRIGONOMETRICA

Chiamiamo la lunghezza dei lati x.

Il triangolo ABE è sia isoscele, AB=AE essendo entrambi i lati di un quadrato, che rettangolo, ∠BAE=90° essendo angolo di un quadrato, dunque è noto che gli angoli adiacenti alla diagonale BE equivalgono a 45°, in particolare $\alpha=45°$.

Per il teorema di Pitagora sappiamo che $EC^2=AE^2+AC^2 \longrightarrow EC=\sqrt{[x^2+(2x)^2]}$

$EC=\sqrt{(x^2+4x^2)} \longrightarrow EC=\sqrt{(5x^2)} \longrightarrow EC=\sqrt{5}*x$. Dunque $\sin(\beta)=AE/EC=x/\sqrt{5}*x=\sqrt{5}/5$, mentre $\cos(\beta)=AC/EC=2x/\sqrt{5}*x= 2\sqrt{5}/5$.

Analogamente: $ED=\sqrt{[x^2+(3x)^2]} \longrightarrow ED=\sqrt{(x^2+9x^2)} \longrightarrow ED=\sqrt{(10x^2)} \longrightarrow ED=\sqrt{10}*x$, $\sin(\gamma)=AE/ED=x/\sqrt{10}*x=\sqrt{10}/10$ e $\cos(\gamma)=AD/ED=3x/\sqrt{10}*x=3\sqrt{10}/10$.

Sappiamo grazie alle formule di addizione che:

$\sin(n+m)=\sin(n)*\cos(m)+\sin(m)*\cos(n)$.

Dunque

$\sin(\beta+\gamma)=\sin(\beta)*\cos(\gamma)+\sin(\gamma)*\cos(\beta) \longrightarrow \sin(\beta+\gamma)=(\sqrt{5}/5)*(3\sqrt{10}/10)+(\sqrt{10}/10)*(2\sqrt{5}/5)$

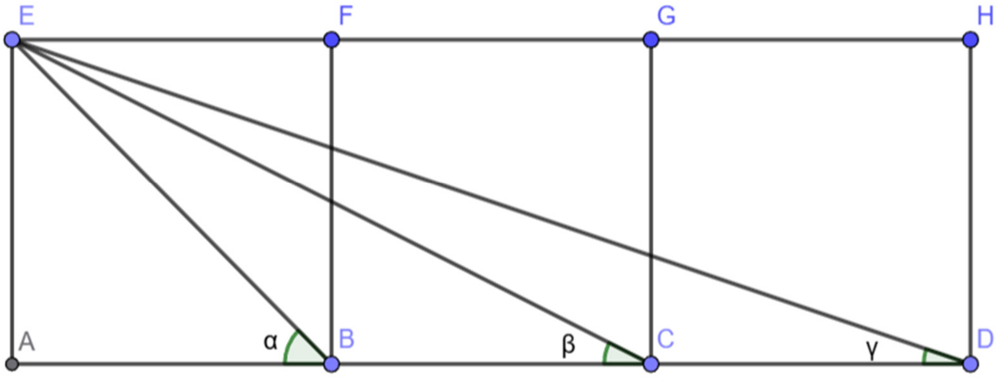
$\sin(\beta+\gamma)=(3\sqrt{50}/50)+(2\sqrt{50}/50) \longrightarrow \sin(\beta+\gamma)=(2+3)*5*\sqrt{2}/50 \longrightarrow \sin(\beta+\gamma)=5\sqrt{2}/10$

$\sin(\beta+\gamma)=\sqrt{2}/2 \longrightarrow \beta+\gamma=\arcsin(\sqrt{2}/2) \longrightarrow \beta+\gamma=45°$. Per la proprietà transitiva dunque $\alpha=\beta+\gamma$.

RISOLUZIONE TRAMITE [LA] GEOMETRIA EUCLIDEA

*ho dato un nome agli altri vertici

Prendiamo in considerazione i [[2]] [due] triangoli BCE e BDE, essi hanno $\angle EBC$ in comune e sapendo che $EB=\sqrt{2}*x$, essendo diagonale di un quadrato, possiamo



calcolare

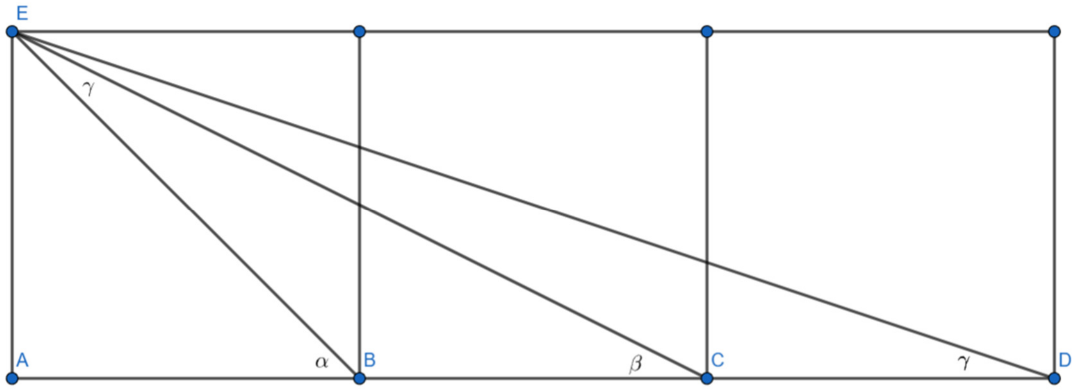
$BC/EB=x/\sqrt{2}*x=\sqrt{2}/2$, e [[errato: $BE/DE=\sqrt{2}*x/2x=\sqrt{2}/2$]] [errato; scambiate le lettere, equazioni scritte in riga; era meglio usare un equation editor]

Per la proprietà transitiva $BC/EB=BE/DE$, dunque grazie al secondo criterio di similitudine dei triangoli possiamo dire che $BCE \sim BDE$, da qui sappiamo dunque che [[errato: $\angle BEC=\beta$]]. [Corrige: $\angle BEC=\gamma$]].

Sappiamo che $\angle DEH=\gamma$, [[errata: poiché]] [corrige: perché] essi sono angoli alterni interni formati dalle rette parallele AD e EH tagliate [[trasversalmente]] dalla [trasversale] [[retta]] ED, analogamente $\alpha=\angle BEH=\angle BEC+\angle DEH$, [ossia] $\alpha=\beta+\gamma$.

2) Soluzione inviata da Michele T. e Lorenzo B., Classe 4^ BS, Liceo Scientifico L.B. Alberti, Cagliari

[Commento: dimostrazione corretta, basata sulla similitudine. Tuttavia, la notazione usata per gli angoli non va bene.]



Tesi: $\alpha = \beta + \gamma$

Per dimostrare la tesi si sfrutterà il teorema dell'angolo esterno: infatti, dimostrando che CEB^ è uguale a γ si potrebbe concludere la dimostrazione, poiché α è angolo esterno del triangolo EBC e i due angoli interni non adiacenti ad esso sono appunto CEB^ ed ECB^ (che è uguale a β).
È a questo punto sufficiente dimostrare che CEB^ = γ.
Per farlo si nota la similitudine tra i triangoli DEB ed EBC.
Lo si evince dalla seguente tabella [si doveva citare il III criterio di similitudine dei triangoli] che mostra [[detto male: la proporzionalità dei due triangoli analizzando quella tra i singoli lati]] [corrige: la similitudine dei due triangoli analizzando la proporzionalità quella tra i singoli lati]:
[

DEB		EBC		Rapporto
EB	$L\sqrt{2}$	BC	L	$\sqrt{2}$
BD	$2L$	EB	$L\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
ED	$L\sqrt{10}$	EC	$L\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$

Con L si intende il lato dei [tre] 3 quadrati.

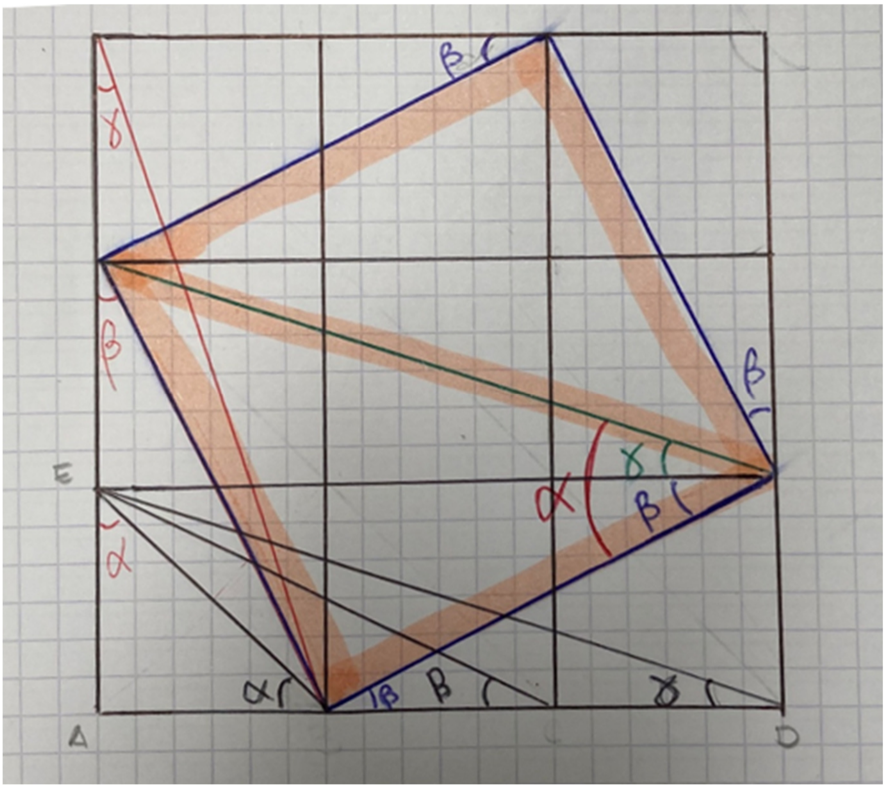
In particolare si ha che CEB^ = BDE^ = γ.
Per quanto detto inizialmente, si ha così la tesi.

3) Soluzione inviata da Irene M., 2ACAT, ITG. "G.G. Marinoni", Udine

[Commento: bella soluzione visuale, ma che, a parole, è espressa in modo non sempre chiaro.]

Ipotesi: $AB \cong BC \cong CD \cong AE$	Tesi: $\alpha = \beta + \gamma$

DIMOSTRAZIONE GRAFICA:
Si ha: $\alpha = 45°$ essendo $45°$ l'angolo formato dalla diagonale EB del primo quadrato [quale?]. Allora basta dimostrare che $\beta + \gamma = 45°$, ovvero che, posti β e γ consecutivi, essi formano a loro volta un angolo che individua una diagonale di un quadrato.



4) Soluzione di Lina C., Classe 1A scientifico, LS “Enrico Fermi”, Milano

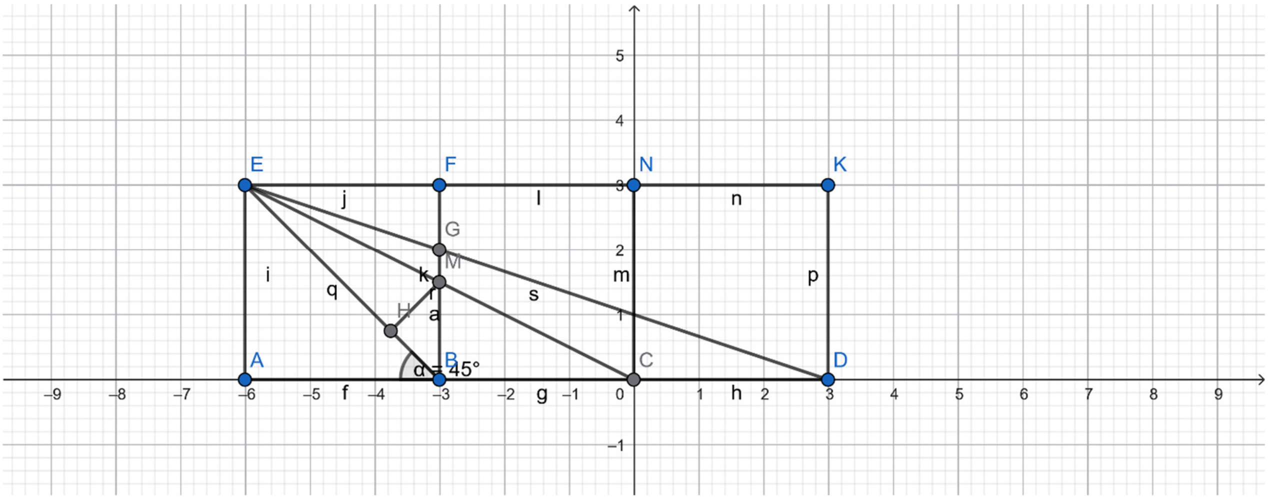
[Commento: la figura contiene gli assi cartesiani, la quadrettatura e i nomi di tutti gli “oggetti” creati, che erano da evitare.

La soluzione è molto molto prolissa e in definitiva poco chiara; si doveva scegliere una maggiore sintesi.

Le formule sono scritte male.

Errato l’uso del simbolo ≡.

Le figure sono confuse: occorre imparare a usare GeoGebra].



[Commento. Figura con molti elementi inutili: non serviva il piano cartesiano; non serviva la griglia; non lasciare i nomi di tutti gli oggetti disegnati. Occorre imparare a usare GeoGebra…]

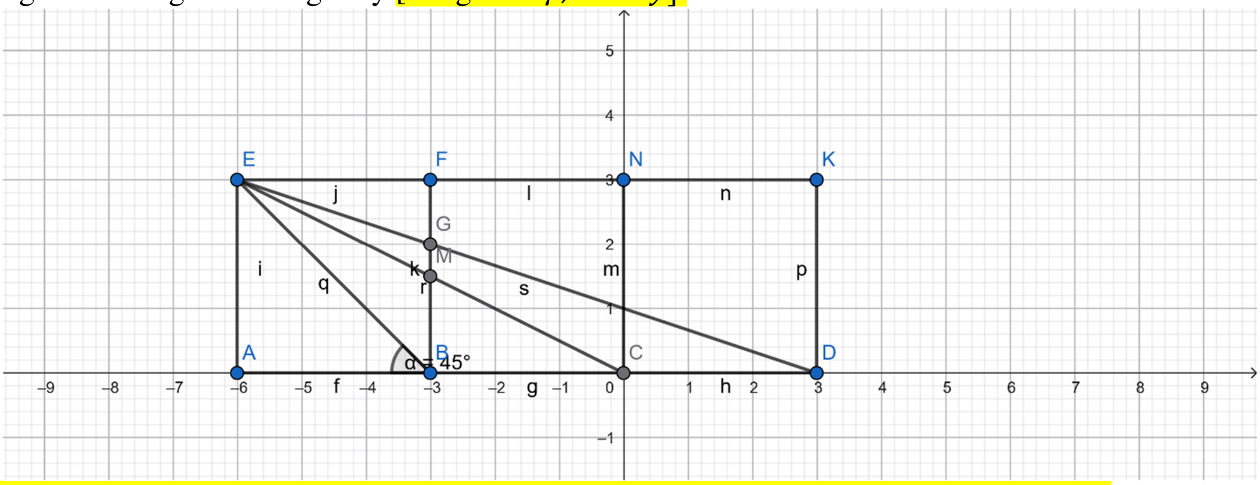
Dimostrazione con uso [?] trigonometrico:

1. Dal punto medio M del lato FB, traccio l’altezza relativa al lato BE che lo interseca quindi nel punto che chiamiamo H. dato che i tre quadrati sono uguali, EF≡BC, BF≡DK, EF≡FN≡NK. Quindi l’angolo E$\hat{F}$M≡C$\hat{B}$M≡N$\hat{K}$D≡90º.
2. Poiché l’angolo $E\hat{M}F$ e l’angolo $C\hat{M}B$ sono opposti al vertice, essi sono uguali. Dato che ci sono due lati uguali (CB≡EF e FM≡MB) e due angoli uguali ($C\hat{B}M \equiv$ E$\hat{F}M$ e $C\hat{M}B \equiv$ E$\hat{M}F$), il triangolo EMF≡CBM, $\overline{FM}$=$\overline{BM}$.
3. Nel quadrato ABFE, BF≡EF, quindi l’angolo $F\hat{B}E \equiv 45°$. Poiché $\overline{MH} \perp \overline{BE}$, l’angolo $M\hat{H}B \equiv 90°$. Inoltre l’angolo $M\hat{B}E$ è di 45 gradi, quindi il triangolo MHB è un triangolo rettangolo isoscele e perciò MH ≡ BH ≡ x da ora in poi.
4. BM≡FM e valgono entrambi $\sqrt{2}x$. Quindi BF=2$\sqrt{2}x$=DK=EF. Dato che BF∥DK, i triangoli EFG ed EKD sono simili. Quindi possiamo scrivere la proporzione $\frac{EF}{EK} = \frac{FG}{DK}$.
Perché $\overline{EF}$=$\overline{FN}$=$\overline{NK}$, $\frac{EF}{EF+FN+NK}$=$\frac{FG}{DK}$ =$\frac{EF}{3EF}$=$\frac{1}{3}$, perché$\overline{DK}$=$\overline{BF}$=2$\sqrt{2}$X, quindi FG=$\frac{2}{3}\sqrt{2}$X
5. Poiché I ’angolo FBE=45 gradi, I ‘angolo EFB =90 gradi, quindi $\overline{BE}$ =$\sqrt{2}$BF=4X, EH=4X-3X=X. Dato che I’ angolo MHB=90 gradi, I’ angolo MHE=180°-90°=90°. L’ angolo GFE=I’ angolo MHE =90°, $\frac{FG}{MH}$=$\frac{FE}{HE}$=$\frac{2}{3}\sqrt{2}$, quindi il triangolo GFE è simile al triangolo MHE e I’ angolo GEF è uguale all’ angolo MEH.

6. Poiché I' angolo CBM è uguale all' angolo EFM è uguale a 90 gradi, quindi il segmento EK è parallelo al segmento AD, possiamo dire che y=angolo GEF è uguale all' angolo esterno del triangolo EBC, quindi a=b+angolo MEH, allora a è a=b+y.

DIMOSTRAZIONE SENZA USO DELLA TRIGONOMETRIA

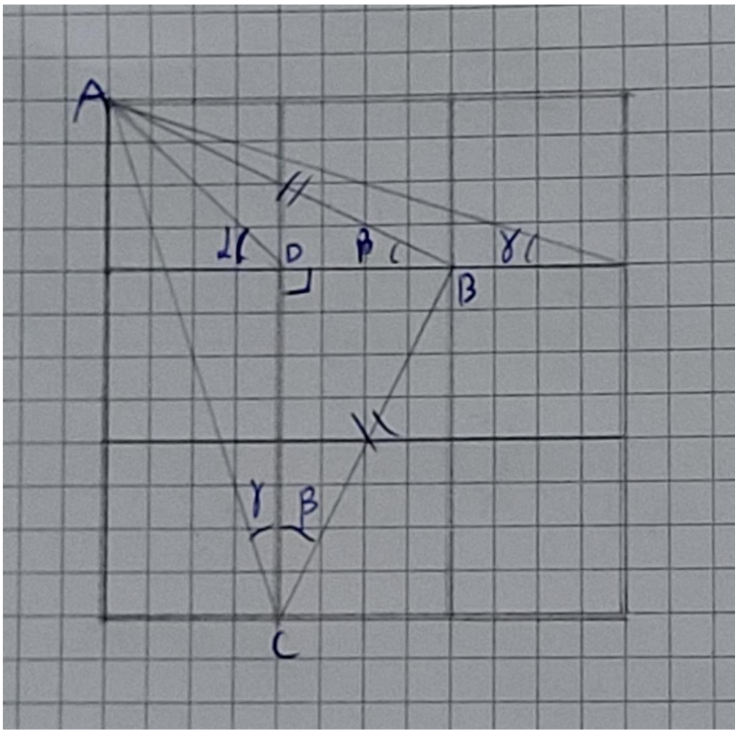
1. Perché tutti e tre i quadrati sono uguali, quindi AB=AE=BC=CD. Nel quadrato ABFE, l'angolo ABE è uguale a è 45° ,l'angolo A è 90°.
2. Supponiamo che $\overline{AB}$=$\overline{AE}$=X, $\overline{BE}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$. $\overline{AD}$=x +x +x=3x, $\overline{DE}=\sqrt{x^2+(3x)^2}=\sqrt{10}$x. [X maiuscolo e poi diventa minuscolo]
3. Perché $\frac{BE}{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{CE}{DE}$, l'angolo CBE = uguale all' angolo EBD, quindi il triangolo CBE è simile al triangolo EBD. Quindi l'angolo BEC =uguale all'angolo BDE è uguale =y
4. Poiché l'angolo ABE è uguale all'angolo A è l'angolo esterno del triangolo BEC, quindi l'angolo A è uguale alla somma dell'angolo B e dell'angolo BEC, è anche uguale all'angolo b +angolo y [l'angolo è γ, $NON\ y$].



[Commento. Figura con molti elementi inutili: non serviva il piano cartesiano; non serviva la griglia; non lasciare i nomi di tutti gli oggetti disegnati. In questo modo la figura è molto confusa. Occorre imparare a usare GeoGebra!]

5) Soluzione inviata da Alessandro P., classe 4^D, Liceo Scientifico "G. Stampacchia", Tricase (LE)

[Commento: svolto in modo apprezzabile, soprattutto la figura, ma il linguaggio usato è impreciso e sciatto, con errori di ortografia. Era opportuno rileggere…]



Per costruzione otteniamo:

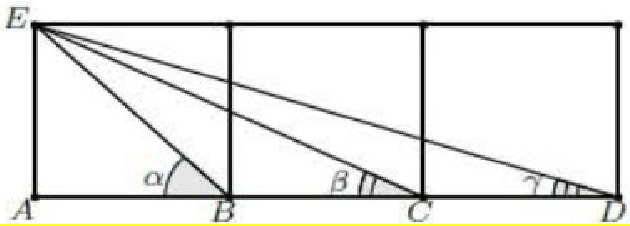
∠ACD=γ, ∠DCB =β, AB=BC

[[Cosiderando]] [Considerando] il triangolo ABC abbiamo:

∠ABC = ∠ABD+∠DBC = β+90°-β = 90°

Quindi il triangolo ABC è isoscele e rettangolo perciò avrà gli [[amgoli]] [angoli] alla base di 45° in particolare ∠ACB = γ+β = 45°, ma α = 45° perché alla base di un triangolo isoscele rettangolo, quindi γ+β=α .

6) Christian M., Classe 4^A Liceo Ginnasio "C. Botta" - Indirizzo Scientifico-Matematico, Ivrea (TO)



[Commento. Presenta due soluzioni trigonometriche corrette. La prima risoluzione è prolissa e inutilmente complicata.]

SOLUZIONE 1 – UTILIZZANDO I SENI E I COSENI:

Se α = β + γ ⇒ sinα = sin(β+γ)

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{EC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + 2^2 \cdot \overline{AB}^2} = \overline{AB}\sqrt{5} \Rightarrow$

$\sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$

Ricaviamo $\overline{EC}$ con il teorema di Pitagora, sapendo che $\overline{AC}$ è il doppio di $\overline{AB}$; da questo può essere calcolato sinβ come $\frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}$

$\cos\beta = \sqrt{1 - sin^2\beta} =$

$= \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Conoscendo ora sinβ e sapendo che la somma dei quadrati del seno e coseno di un angolo è sempre uguale a 1, è ora possibile calcolare cosβ

$\overline{ED} = \sqrt{\overline{AB}^2 + 3^2 \cdot \overline{AB}^2} = \overline{AB}\sqrt{10} \Rightarrow$

$\sin\gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow$

$\cos\gamma = \sqrt{1 - sin^2\gamma} =$

$= \sqrt{1 - \frac{10}{100}} = \sqrt{\frac{90}{100}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ricaviamo $\overline{ED}$, sapendo che $\overline{AD}$ è il triplo di $\overline{AB}$ e, con lo stesso procedimento di prima, ricaviamo sinγ e cosγ

$\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} + + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{15\sqrt{2}}{50} + \frac{10\sqrt{2}}{50} = \frac{25\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sapendo che $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (poiché $\overline{EB}$ è la diagonale del quadrato, che ha tutti angoli retti, e rappresenta anche la bisettrice dell'angolo in B), ricaviamo sinα.

Applicando la formula del seno della somma di due angoli su β e γ, si può notare che il risultato è uguale a sinα

Si ottiene così la conferma che α = β + γ

SOLUZIONE 2 – UTILIZZANDO LE TANGENTI:

Se α = β + γ ⇒ tanα = tan(β+γ)

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\alpha = 1$

$\tan\beta = \frac{\overline{AB}}{2\overline{AB}} = \frac{1}{2}$

$\tan\gamma = \frac{\overline{AB}}{3\overline{AB}} = \frac{1}{3}$

$\tan\alpha = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan\gamma} \Rightarrow$
$1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$

Sapendo che $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (poiché $\overline{EB}$ è la diagonale del quadrato, che ha tutti angoli retti, e rappresenta anche la bisettrice dell'angolo in B), ricaviamo tanα [punteggiatura: manca il punto finale]

Sapendo che $\overline{AC}$ è il doppio di $\overline{AB}$, calcoliamo tanβ come $\frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}$ [manca il punto finale]

Sapendo che $\overline{AD}$ è il triplo di $\overline{AB}$, con un procedimento analogo, calcoliamo tanγ [manca il punto finale]

Applicando la formula della tangente somma di due angoli su β e γ, si può notare che il risultato è uguale a tanα.
Si ottiene così la conferma che α = β + γ
[manca il punto finale]