

Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

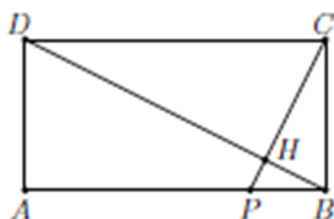
Flatlandia – Problema di febbraio 2026 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 7 al 28 febbraio)

In un rettangolo $ABCD$ si ha $AB = 2 BC$ e il punto P su AB è tale che $AB = 4 PB$ (vedi figura).

- Dimostrare che BD è perpendicolare a PC .
- Se AB misura 4 e H è il punto di intersezione tra BD e PC , determinare l'area del quadrilatero $APHD$.
- Considerare le misure dei segmenti HP , HB , HC , HD . Che cosa si può osservare?



Commento

Il problema di febbraio proponeva la dimostrazione della perpendicolarità tra due segmenti tracciati in un particolare rettangolo. Seguiva una domanda sull'area di un quadrilatero ricavato da tale rettangolo e un'altra domanda dove occorreva scoprire una progressione geometrica tra quattro segmenti.

Alla prima domanda hanno risposto tutti in modo sostanzialmente corretto, anche se a volte un po' prolisso. Alla seconda domanda non tutti hanno risposto in modo corretto. Si sottolinea l'importanza, nel calcolare il rapporto di similitudine, di considerare due lati *corrispondenti*.

Nella terza quasi tutti hanno ricavato in modo corretto la misura dei quattro segmenti citati, ma non tutti hanno notato che erano in progressione geometrica di ragione 2.

Abbiamo ricevuto otto risposte da studentesse e studenti delle seguenti scuole:

- I.I.S. Liceo Scientifico "G. Bruno-R. Franchetti", Mestre Venezia (VE)
- I.I.S "A. Bafile", L'Aquila
- Liceo Scientifico "L.B. Alberti", Cagliari
- Liceo "B. Russell", Cles (TN)

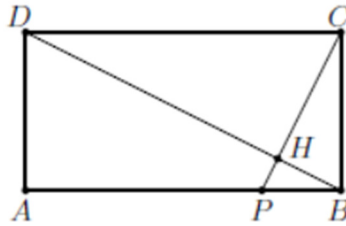
Nota. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della

privacy mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno inviato le soluzioni.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da: Gianmaria O. - LS Classe 4E, I.I.S. "G. Bruno e R. Franchetti" Mestre-VE

a) Consideriamo i triangoli ABD e BCP, entrambi sono triangoli rettangoli in $\angle DAB$ e $\angle CBP$,



inoltre sappiamo che $\frac{AB}{DA} = \frac{2BC}{BC} = 2$ ($DA=BC$ poiché lati opposti di un rettangolo) e $\frac{BC}{PB} = \frac{AB}{AB} = 1$, di conseguenza per il secondo criterio di similitudine $ABD \sim BCP$.

I triangoli ABD e BHP hanno l'angolo $\angle ABD$ in comune e $\angle ADB = \angle BPC$, poiché angoli corrispondenti congruenti di triangoli simili, dunque per il primo criterio di similitudine $ABD \sim BHP$, in particolare $\angle PHB = \angle BAD = \pi/2$, dunque $BD \perp PC$.

b) Poniamo $PB=x$, da qui ricaviamo che $AB=4x$ e $AB = 2BC \Rightarrow 4x = 2DA \Rightarrow DA = 2x$.

Per il teorema di Pitagora $AB^2 + DA^2 = DB^2 \Rightarrow DB = \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} \Rightarrow DB = 2\sqrt{5}x$, da qui possiamo ricavare il rapporto tra i due triangoli simili ABD e BHP facendo il rapporto tra

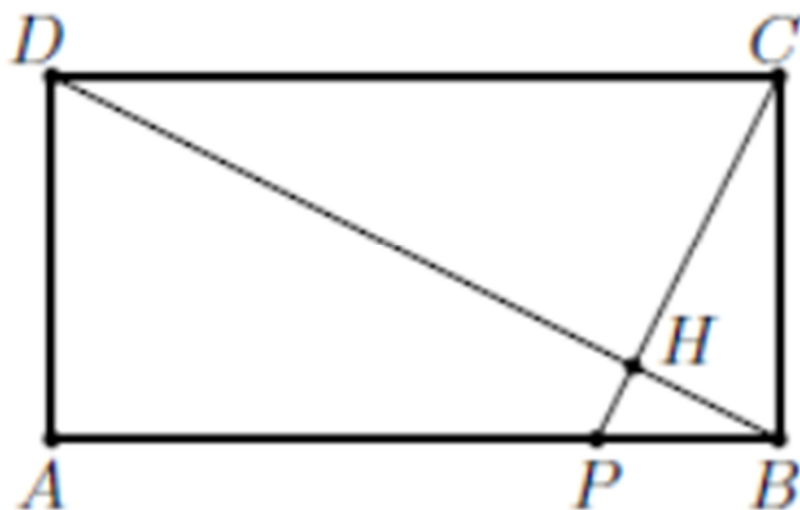
le ipotenuse: $\frac{PB}{BD} = \frac{x}{2\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, dunque il rapporto tra le aree sarà $\frac{S_{PBH}}{S_{ABD}} = \left(\frac{PB}{BD}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{PBH}}{S_{ABD}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2 \Rightarrow S_{PBH} = S_{ABD} \frac{1}{20}$.

[E' superfluo usare x come misura di PB, che è 1]

Possiamo finalmente ricavare l'area di APHD, infatti l'area del triangolo ABD è composta

dalle rispettive aree di APHD e PBH, ovvero $S_{ABD} = S_{PBH} + S_{APHD} \Rightarrow S_{APHD} = S_{ABD} - \frac{1}{20} S_{PBH} \Rightarrow S_{APHD} = \frac{19}{20} S_{ABD}$; l'area di ABD è pari a $\frac{AB \cdot DA}{2} = \frac{4x \cdot 2x}{2} = (2x)^2 = 4$,

quindi $S_{APHD} = \frac{19}{20} S_{ABD} \Rightarrow S_{APHD} = \frac{19}{20} \cdot 4 \Rightarrow S_{APHD} = \frac{19}{5}$.



c) Dato che $\triangle ABD$ e $\triangle BHP$ sono simili $\frac{HP}{DA} = \frac{\sqrt{5}}{10} \Rightarrow HP = \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot DA \Rightarrow HP = \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot 2 \Rightarrow HP = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 sempre per lo stesso motivo $\frac{HB}{HP} = \frac{AB}{DA} \Rightarrow HB = 2HP \Rightarrow HB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, per il teorema di Pitagora
 $HC^2 + HB^2 = BC^2 \Rightarrow HC = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \Rightarrow HC = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ e infine $BD = HD + HB \Rightarrow$
 $HD = BD - HB \Rightarrow HD = 2\sqrt{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow HD = 2\sqrt{5} \frac{AB}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow HD = 2\sqrt{5} \frac{4}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow HD = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Da queste misure notiamo che i segmenti HP, HB, HC e HD sono in progressione geometrica di ragione 2.

RISOLUZIONE PUNTO c) SENZA TENER CONTO DELLE MISURE

[ottimo]

Dato che $BD \perp PC$, per il secondo teorema di Euclide HB [applicato al triangolo rettangolo PBC] è medio proporzionale di HP e HC, mentre HC lo è per HB e HD [nel triangolo DBC],

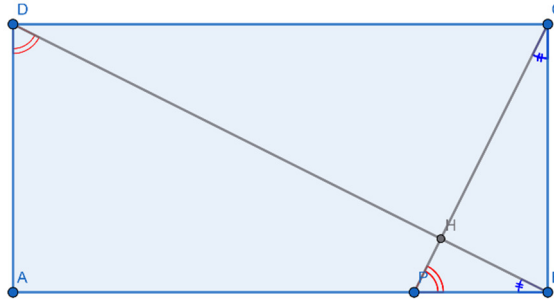
ovvero $\frac{HB}{HP} = \frac{HC}{HB}$, $\frac{HC}{HB} = \frac{HD}{HC}$, per la proprietà transitiva $\frac{HB}{HP} = \frac{HC}{HB} = \frac{HD}{HC}$.

Sapendo che $\triangle ABD$ e $\triangle BHP$ sono simili e $\frac{AB}{DA} = \frac{2DA}{DA} = 2$, allora $\frac{HB}{HP} = 2 \Rightarrow HB = 2HP$,
 analogamente $HC = 2HB = 4HP$ e $HD = 2HC = 8HB$.

Dunque i segmenti HP, HB, HC e HD sono in progressione geometrica di ragione 2.

2) Soluzione inviata da: Aurora D., 4a I, I.I.S "A. Bafile", L'Aquila

[Svolto correttamente, ma si poteva abbreviare la risposta b) tenendo presente che l'area di PBH è 1/5 e area di ABD=4; ne segue che l'area richiesta di APHD è uguale a 4-1/5=19/5]



- (a) $\triangle BCD \sim \triangle BCP$ per il secondo criterio di similitudine; in particolare $\angle BCD \equiv \angle BCP \equiv \angle CBP$ e i lati ad esso adiacenti (DC, CB, BA) sono in proporzione, infatti per ipotesi $DC \cong AB = 2BC$ e $BC = 2BP$.

$\triangle BHP \sim \triangle BCP$ per il primo criterio di similitudine; in particolare $\angle BPH \equiv \angle BPC$ e $\angle HPB \equiv \angle CBD \equiv \angle BDC \equiv \angle BCP$, questo implica che $\triangle BHP$ è rettangolo quindi anche $BD \perp PC$ ■

- (b)

$$CP = \sqrt{CB^2 + PB^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\triangle BCP} = \frac{PB \cdot BC}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 = \frac{CP \cdot BH}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot BH}{2} \rightarrow 1 = \frac{\sqrt{5} \cdot BH}{2} \rightarrow BH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$HP = \sqrt{PB^2 - HB^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$A_{\triangle BHP} = \frac{HP \cdot BH}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{5}$$

$$A_{\triangle BCH} = A_{\triangle BCP} - A_{\triangle BHP} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$A_{\triangle CDH} = A_{\triangle BCD} - A_{\triangle BCH} = \frac{CD \cdot BC}{2} - A_{\triangle BCH} = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 2 = 8$$

$$A_{\triangle BCP} = \frac{PB \cdot BC}{2} = 1$$

$$A_{APHD} = A_{ABCD} - A_{\Delta BCP} - A_{\Delta CDH} = 8 - 1 - \frac{16}{5} = \frac{19}{5}$$

(c)

$$HP = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$BH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} DH &= BD - BH = \sqrt{BC^2 + DC^2} - BH = \sqrt{4 + 16} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10 - 2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

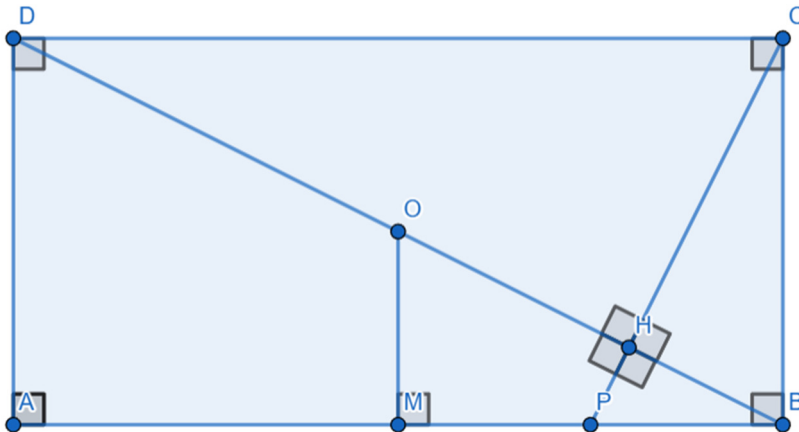
$$BD = DH + BH = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$CP = CH + PH = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Si può notare che il segmento CP risulta essere la metà della diagonale BD.

[Trova i valori corretti le misure dei segmenti, ma non nota la progressione geometrica di ragione 2].

3) Soluzione inviata da: Michele T., Liceo L.B. Alberti, Cagliari
 Classe: 4a A



1)
 Chiamo O il punto medio della diagonale BD. Chiamo M il punto medio di AB.
 Si ha che $OM \cong \frac{1}{2}BC \cong \frac{1}{4}AB \cong PB$.

I triangoli OMB e PBC sono dunque congruenti poiché:

- $OM \cong PB$
- $MB \cong BC$
- I 2 triangoli sono entrambi rettangoli

Di conseguenza, i triangoli OMB e BHP sono simili poiché:

- $\hat{O}BM$ è in comune
- $\hat{C}PB$ e $\hat{M}OB$ sono angoli corrispondenti di triangoli congruenti

Perciò $\hat{P}HB = \hat{O}MB = 90^\circ$.

2)
 Essendo OM parallelo ad AD, i triangoli OMB e ADB sono simili per il teorema di Talete. Di conseguenza, per proprietà transitiva, il triangolo PHB è simile al triangolo ADB: in particolare, i 2 triangoli presentano un rapporto di similitudine pari a $\frac{1}{4}$ [errato: il rapporto di similitudine è $\frac{PB}{OP} = \frac{1}{\sqrt{20}}$]. Dunque, il rapporto tra le aree dei 2 triangoli è pari a $\frac{1}{16}$.

Dunque:

$$\text{Area}(APHD) = \text{Area}(ADB) - \text{Area}(PHB) = \text{Area}(ADB) - \frac{1}{16} \text{Area}(ADB) = \frac{15}{16} \text{Area}(ADB) = \frac{15}{16} (4 \cdot 2) / 2 = 15/4. \text{ [Errato]}$$

3)
 Applicando il secondo teorema di Euclide rispettivamente ai triangoli BCD e PBC, si ottengono le seguenti equazioni:

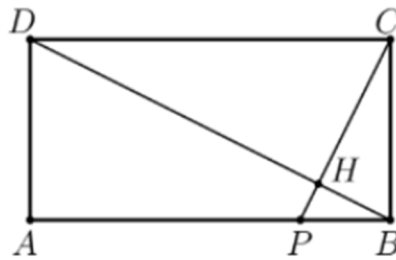
- $DH \cdot HB = HC^2$
- $HB^2 = PH \cdot HC$

Dividendo le due equazioni membro a membro ottengo

$$DH/HB = HC/PH.$$

[Non trova la misura dei segmenti e non arriva a notare la progressione geometrica].

4) Soluzione inviata da: Pietro B. 2^aD Liceo B. Russell Cles (TN)



a) Chiamando x il segmento PB, si nota che i triangoli PBC e ABD sono simili (hanno i lati AD-AB e PB-BC in proporzione). A causa di questo gli angoli DBA e PCB sono congruenti, come lo sono anche gli angoli ADB e BPC.

Questo porta alla conclusione che PBH abbia gli stessi angoli dei triangoli citati sopra, rendendolo simile ad essi [detto male]. La stessa considerazione può essere fatta per il triangolo DCP [errato, invece di DCP, si doveva considerare il triangolo DCH], dove l'angolo HDC è congruente all'angolo DBA perché alterno interno ad esso e l'angolo BPC è congruente all'angolo DCP sempre per lo stesso motivo.

A seguito di queste osservazioni si deduce che tutti i triangoli citati sopra siano rettangoli, rendendo PC perpendicolare a BD. [detto male].

b) Conoscendo la misura del lato AB (4) si può calcolare quella di BC, che sarà 2, e quella di PB, che sarà 1. Si sa che la diagonale [di ABCD] misura $\sqrt{AB^2 + AD^2}$ e cioè $\sqrt{20}$. Chiamiamo y BH e impostiamo l'equazione per trovare l'incognita. Si utilizza il secondo teorema di euclide [Euclide applicato al triangolo rettangolo BCD].

[Qui occorre scrivere $CH^2 = BH \cdot HD$, e quindi:

$$(\sqrt{4 - y^2})^2 = y \times (\sqrt{20} - y^2) \text{ . errato } y^2$$

$$(\sqrt{4 - y^2})^2 = y \times (\sqrt{20} - y) \text{ .}$$

Questa equazione dà come risultato $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ [mancano i calcoli]. Lo utilizziamo per calcolare

PH per mezzo del teorema di pitagora [Pitagora al triangolo rettangolo PHB]: $\sqrt{1 - (\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}$.

Il risultato è $\frac{1}{5}$ [PH = $\frac{1}{5}$].

Troviamo infine l'area del triangolo ABD, che sarà $\frac{AB \cdot AD}{2}$, dando come risultato 4, e di PBH ($\frac{PH \cdot HB}{2}$), che dà come risultato $\frac{1}{5}$. Per trovare l'area di APHD bisogna sottrarre la misura dell'area di PBH a quella dell'area di ABD. Il risultato è $\frac{19}{5}$.

Considerando le misure dei lati HP, HB, HC, HD si può notare come siano in proporzione.

[Perché?]

Infatti $HB : HP = HC : HD$.

[Si ferma solo a questo rapporto e non trova la progressione geometrica]