

Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

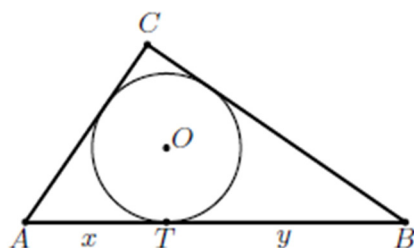
Flatlandia – Problema di gennaio 2026 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 7 al 28 gennaio 2026)

ABC è un triangolo rettangolo, con l'angolo retto in C .

1. Indicate con a, b le misure dei cateti e con c quella dell'ipotenusa, dimostrare che il raggio della circonferenza inscritta misura: $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
2. Chiamato T il punto di tangenza tra l'ipotenusa e la circonferenza inscritta e indicate con x e y le misure dei segmenti AT e TB (vedi figura), dimostrare che l'area del triangolo è xy .



Commento

Il problema di gennaio proponeva la dimostrazione di due proprietà poco utilizzate, se non poco note, in particolare la seconda. Abbiamo ricevuto otto proposte di soluzione, in genere corrette, anche se a volte prolisse e talora imprecise.

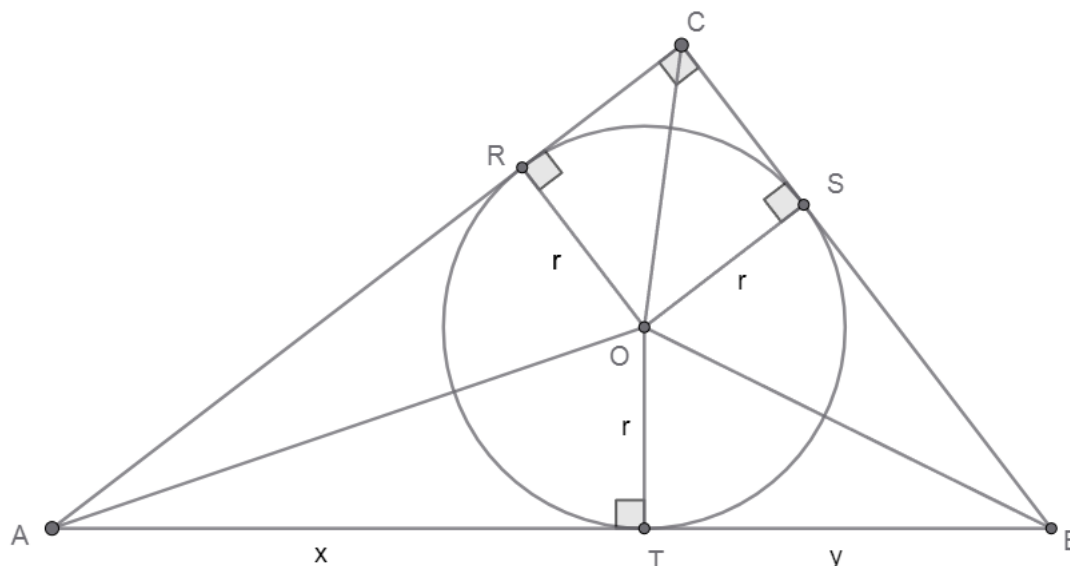
Abbiamo ricevuto otto risposte da studentesse e studenti delle seguenti scuole:

- I.I.S. Liceo Scientifico "G. Bruno-R. Franchetti", Mestre Venezia (VE)
- Liceo Scientifico "L.B. Alberti", Cagliari
- I.I.S.S. "Charles Darwin", Roma
- IIS "Badoni", Lecco
- Liceo Scientifico "A. Rosmini", Rovereto (TN)
- Liceo Classico "Don Mazza", Verona
- LS "Barsanti-Matteucci", Viareggio (LU) – 2 soluzioni

Nota. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della 'privacy' mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno inviato le soluzioni.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Michele T., Classe 4a, Liceo L.B. Alberti, Cagliari



Punto 1

Osserviamo che l'area A del triangolo rettangolo si può determinare in 2 modi.

$$A = \frac{ab}{2} \quad (1)$$

$$A = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \quad (2)$$

dove r è il raggio della circonferenza inscritta, mentre a, b, c sono, rispettivamente, le misure di AC, BC e AB.

Dalla (1) e dalla (2) si ottiene

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{ab}{2} \quad (3)$$

Ricavo r e sostituisco c con $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$r = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Razionalizzo, semplifico e dimostro la tesi [al denominatore manca $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$]

$$r = \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{2ab} = \frac{1}{2}(a+b-c) \quad (4)$$

Punto 2

Chiamo R e S i punti di tangenza della circonferenza con AC e con BC, rispettivamente.

Osservo che:

$\widehat{CRO} = \widehat{CSO} = 90^\circ$ in quanto la retta tangente alla circonferenza ed il raggio avente un estremo nel punto di tangenza sono perpendicolari.

$\widehat{RCS} = 90^\circ$ per ipotesi

Dunque anche $\widehat{SOR} = 90^\circ$. Dunque ORCS è un rettangolo.

Ma nel rettangolo ORCS i lati OR e OS adiacenti sono congruenti

Pertanto il rettangolo ORCS è un quadrato, di lato r .

In particolare $CR = CS = r$.

Ora considero i triangoli rettangoli AOR e ATO.

Essi hanno in comune l'ipotenusa AO.

Applico il teorema di Pitagora a entrambi

$$x^2 + r^2 = \overline{AO}^2 = (a - r)^2 + r^2$$

$$x^2 = (a - r)^2$$

Dunque

$$x = a - r$$

Tenuto conto della (4)

$$x = a - r = a - \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+c-b}{2} \quad (5)$$

Procedendo allo stesso modo con i due triangoli BOS e BTO ricavo

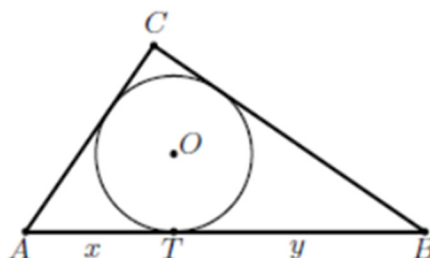
$$y = b - r = b - \frac{a+b-c}{2} = \frac{b+c-a}{2} \quad (6)$$

Dalla (5) e dalla (6) ottengo che

$$\begin{aligned} xy &= \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{ab+ac-a^2+bc+c^2-ac-b^2-bc+ab}{4} \\ &= \frac{2ab+c^2-(a^2+b^2)}{4} = \frac{2ab+(a^2+b^2)-(a^2+b^2)}{4} = \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Dimostrando così la tesi.

2) Soluzione inviata da: Gianmaria O. - LS, Classe 4E, I.I.S. "G. Bruno e R. Franchetti" Mestre-VE



1) Chiamiamo i punti di tangenza della circonferenza inscritta ad ABC "D" e "F" rispettivamente nei segmenti AC e BC. Sappiamo che la retta tangente è perpendicolare al raggio nel punto di contatto, dunque $OD \perp AC$ & $OF \perp BC$.

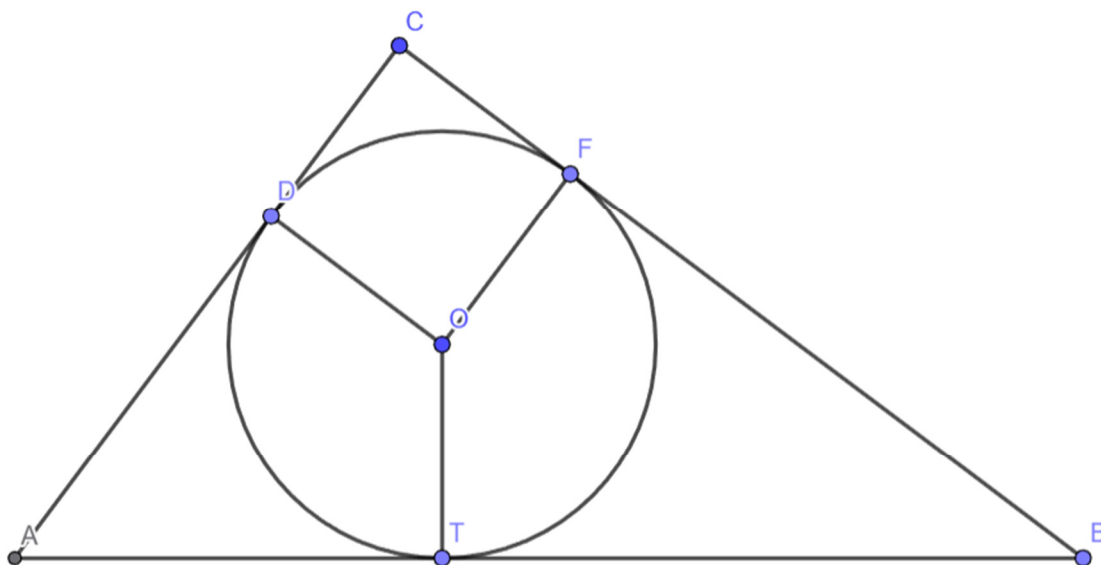
Consideriamo il quadrilatero CDOF, è noto che $\angle DCF = \angle CDO = \angle CFO = \pi/2$, dunque, sapendo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 2π , possiamo trovare $\angle DOF$:

$$\angle DCF + \angle CDO + \angle CFO + \angle DOF = 2\pi \Rightarrow \pi/2 + \pi/2 + \pi/2 + \angle DOF = 2\pi \Rightarrow \angle DOF = \pi/2$$

Dunque, poiché CDOF ha tutti gli angoli congruenti, esso è un rettangolo, perciò i lati opposti sono congruenti a due a due: $DO = CF$ & $OF = CD$. Dato che $DO = OF = r$, per la proprietà transitiva tutti i lati di CDOF sono congruenti tra loro e misurano r (dunque CDOF è un quadrato).

~~I segmenti che congiungono~~ [Le tangenti condotte da] un punto esterno ai due punti di tangenza di una circonferenza sono congruenti, quindi $AT = AD$ & $BT = BF$.

Possiamo allora trasformare la somma dei cateti a e b in questo modo: $a + b = CD + AD + CF + BF = r + AT + r + BT = 2r + (AT + BT) = 2r + c$
 $a + b = 2r + c \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c).$



2) Dalla risoluzione del punto 1 ricaviamo che: $x=AD$ & $y=BF$, e $DC=CF=r$.

Inoltre è noto, grazie al teorema di Pitagora, che $a^2 + b^2 = c^2$ e che $r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$, come ci era richiesto di dimostrare.

Grazie a queste informazioni possiamo riscrivere xy in funzione dei cateti di ABC, infatti:

$$\begin{aligned} xy = AD \cdot BF &\Rightarrow xy = (b - CD) \cdot (a - CF) \Rightarrow xy = (b - r) \cdot (a - r) \Rightarrow xy \\ &= \left(b - \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)\right) \cdot \left(a - \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= \left(\frac{1}{2} \cdot (c - (a - b))\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (c + (a - b))\right) \Rightarrow xy = \frac{1}{4} \cdot (c^2 - (a - b)^2) \Rightarrow xy \\ &= \frac{1}{4} \cdot (c^2 - a^2 + 2ab - b^2) \Rightarrow xy = \frac{1}{4} \cdot 2ab \end{aligned}$$

$xy = \frac{ab}{2}$, dato che ABC è un triangolo rettangolo[una virgola,] la metà del prodotto dei suoi cateti equivale [è uguale] all'area di ABC, dunque $x \cdot y$ è l'area del triangolo.

METODO ALTERNATIVO DI RISOLUZIONE DEL PUNTO 1

Chiamiamo i punti di tangenza della circonferenza inscritta ad ABC "D" e "F" rispettivamente nei segmenti AC e BC.

Sappiamo che la retta tangente è perpendicolare al raggio nel punto di contatto, dunque OD, OF e OT sono rispettivamente altezze dei triangoli ACO, BCO e ABO, sapendo che queste altezze sono anche raggi della circonferenza iscritta ad ABC, possiamo riscrivere l'area di quest'ultimi [questi ultimi] triangoli della forma $\frac{r \cdot B}{2}$, dove r è il raggio e B [B è un punto!] indica le rispettive basi.

Dato che i triangoli ACO, BCO e ABO compongono il triangolo ABC la somma delle loro aree equivale [è uguale] all'area di ABC la quale è uguale alla metà del prodotto dei suoi cateti, essendo un triangolo rettangolo.

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{ACO} \Rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} \Rightarrow ab = r \cdot (a + b + c) \Rightarrow r = \frac{ab}{a + b + c}$$

$$r = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2}{2(a + b + c)}; \text{ dato che ABC è un triangolo rettangolo in C, vale il}$$

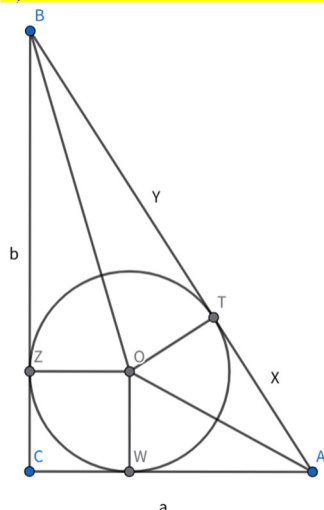
teorema di Pitagora nei suoi lati, ovvero $a^2 + b^2 = c^2$, possiamo dunque

sostituirlo nella nostra equazione [uguaglianza]:

$$r = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + b^2)}{2(a + b + c)} \Rightarrow r = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2(a + b + c)} \Rightarrow r = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2(a + b + c)} \Rightarrow r = \frac{(a + b + c) \cdot (a + b - c)}{2(a + b + c)}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c).$$

3) Soluzione inviata da: Enoch Jin - LS, Classe 4DL, I.I.S.S. "Charles Darwin", Roma



Dimostrare che $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$

Per il teorema delle tangenti condotti da un punto esterno possiamo dire che $TA = WA = x$, $CW = CZ$ e $BZ = BT = y$

Per dimostrare che $CW = OW$ cioè uguale al raggio sappiamo che una tangente e il raggio forma un'angolo di 90 gradi quindi possiamo dire che il quadrilatero CWOZ ha 4 angoli retti perché il triangolo è retto in C e due lati adiacenti sono uguali ($OZ = OW$ che sono due raggi) quindi il quadrilatero CWOZ deve essere per forza un quadrato.

Quindi $CW = OW = r$

Il lato "a" è formato da $r + x$ e il lato "b" è formato da $r + y$ e "c" è $x + y$ mettendo questi dati nella formula otteniamo

$$r = \frac{1}{2}(r + x + r + y - x - y)$$

Svolgendo i calcoli diventa

$$r = \frac{1}{2}(2r)$$

$$r = r$$

E così abbiamo dimostrato che $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

[In questo modo non viene dimostrata la formula, ma solo verificata che è corretta!!!]

Dimostrare che l'area del triangolo è xy

Area del triangolo è base per altezza diviso due usando base "a" e altezza "b" otteniamo

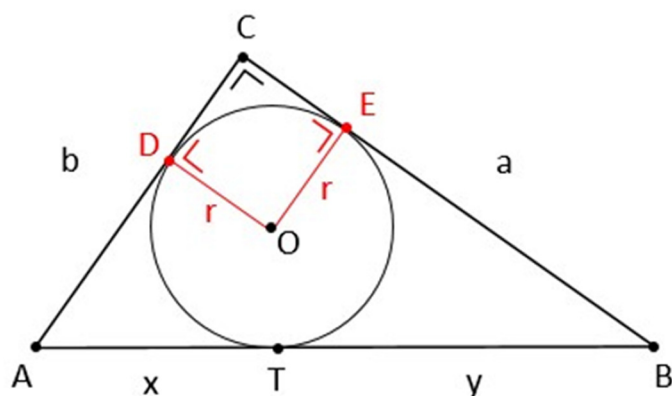
$$\frac{(r + x)(r + y)}{2}$$

$$\frac{(r^2 + ry + xr + xy)}{2}$$

Un'altro modo per trovare l'area è fare l'area di tutti i triangoli e quadrati e sommarli insieme quindi otteniamo $xr + yr + r^2$ (manca il punto).

Mettendo insieme i due si ottiene $xr + yr + r^2 = \frac{(r^2 + ry + xr + xy)}{2}$ che dopo una serie di calcoli [dove sono i calcoli?] si arriva a $r^2 + xr + yr = xy$ la parte sinistra all'uguale sappiamo essere l'area del triangolo per il secondo metodo per trovare l'area quindi siamo riusciti a dimostrare che l'area del triangolo è xy . [manca il punto].

4) Soluzione inviata da: Chiara Benedetti, Classe 3^a sez. AMN, IIS "Badoni" Lecco



1) |

$$\hat{C} = 90^\circ \text{ (per ipotesi)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ Perché sono i punti di tangenza}$$

Dato che $\overline{DO} = \overline{EO}$, perché corrispondono al raggio "r" della circonferenza, $\hat{D} = 90^\circ$ e $\hat{E} = 90^\circ$, allora CDOE è un quadrato

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{AT} \\ \overline{BE} = \overline{BT} \\ \overline{CD} = \overline{CE} \end{array} \right\} \text{ Dai segmenti tangenti da un punto esterno a una circonferenza, sappiamo che sono congruenti}$$

$$a = \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BE} + r \quad \overline{BE} = a - r$$

$$b = \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD} + r \quad \overline{AD} = b - r$$

$$c = \overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AD} + \overline{BE}$$

$$c = \overline{AD} + \overline{BE} = (b - r) + (a - r)$$

$$c = a + b - 2r$$

$$-2r = -a - b + c$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

[Detto male qui sopra: "Dai segmenti tangenti da un punto esterno..."]

2)

$$a = BC = BE + EC = y + r \quad (\text{perché sappiamo che } BE = BT = y \text{ e } EC = r)$$

$$b = \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = x + r \quad (\text{perché sappiamo che } \overline{AD} = \overline{AT} = x \text{ e } \overline{DC} = r)$$

$$c = \overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB} = x + y$$

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} \longrightarrow \text{Formula per calcolare l'area del triangolo}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \longrightarrow (x + y)^2 = (x + r)^2 + (y + r)^2 \quad (\text{Pitagora})$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy = \cancel{x^2} + r^2 + 2xr + \cancel{y^2} + r^2 + 2yr$$

$$\cancel{2xy} = \cancel{2xr} + \cancel{2yr} + \cancel{2r^2}$$

$$xy = xr + yr + r^2$$

$$A = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(x + r) \cdot (y + r)}{2} = \frac{xy + \boxed{xr + yr + r^2}}{2} \longrightarrow = xy$$

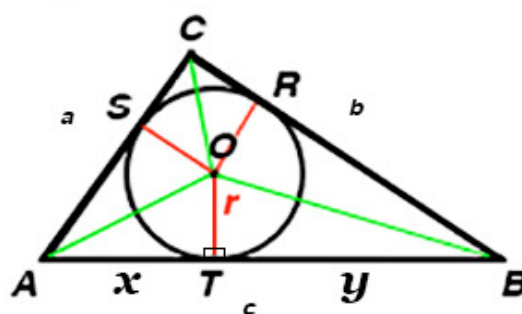
$$A = \frac{xy + xy}{2} = \frac{\cancel{2xy}}{\cancel{2}}$$

$$A = xy$$

c.v.d.

**5) Soluzione proposta da Viola C. 2^a A Liceo Scientifico “A. Rosmini”,
Rovereto (TN)**

[Presenta una buona soluzione]



Pongo: $a = AC$, $b = BC$, $c = AB$

S punto di tangenza del cerchio con AC

R punto di tangenza del cerchio con BC

1. I raggi OT, OR, OS sono ortogonali ai lati del triangolo ABC e quindi altezze dei triangoli AOB, BOC, AOC. Segue che,

$$\text{Area (ABC)} = \text{Area (AOB)} + \text{Area (BOC)} + \text{Area (AOC)}$$

$$ab/2 = cr/2 + br/2 + ar/2 \text{ e semplificando}$$

$$ab = (a + b + c) r$$

Per ipotesi vale il teorema di Pitagora per ABC, cioè $a^2 + b^2 = c^2$

per questo cerco di far uscire la quantità $a^2 + b^2$ dall'uguaglianza

scritta sopra. Moltiplico ambo i membri dell'uguaglianza per $(a + b - c)$

$$\text{e ottengo } ab(a + b - c) = (a + b - c)(a + b + c) r$$

a destra compare un prodotto notevole

$$ab(a + b - c) = [(a + b)^2 - c^2] r = [a^2 + b^2 + 2ab - c^2] r = 2abr$$

dove l'ultimo passaggio vale per il teorema di Pitagora su ABC

dividendo adesso per $2ab$ ambo i membri ottengo

$$a + b - c = r.$$

2. Poichè $x + y = c$, elevando al quadrato ho $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\text{e quindi } x^2 + y^2 = c^2 - 2xy \quad (*)$$

in questo modo ho fatto apparire il termine xy .

Per il criterio di congruenza fra triangoli rettangoli nella figura sopra noto che:

ATO è congruente a AOS

BTO è congruente a BOR

CSO è congruente a CRO

In particolare $CS = CR$.

Ma $CS = a - x$ ($AS = AT = x$) e $CR = b - y$ ($BR = BT = y$)

sicchè [sicché, va con l'accento acuto]

$$a - x = b - y$$

o anche

$a - b = x - y$. Elevando al quadrato i due membri ottengo:

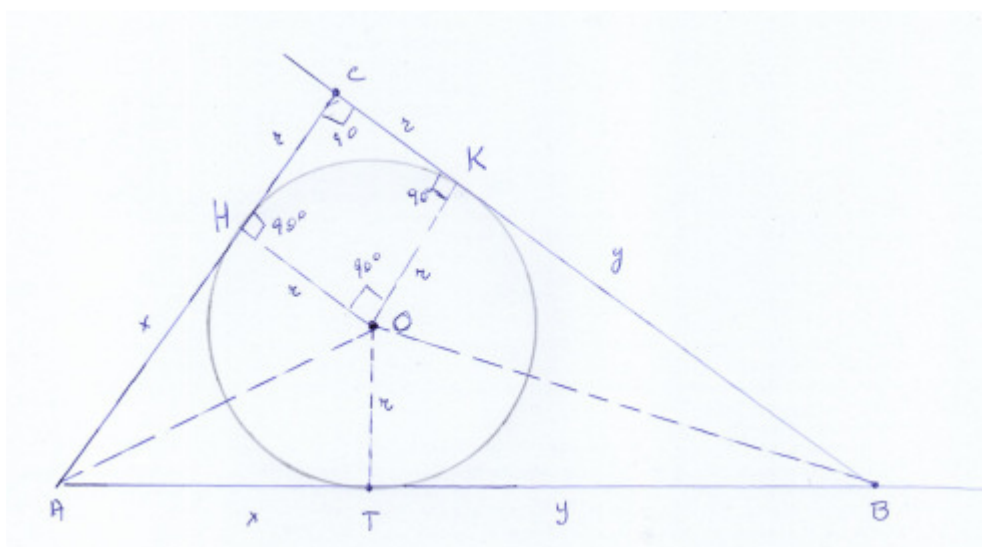
$$a^2 + b^2 - 2ab = x^2 + y^2 - 2xy \text{ quindi per il teorema di Pitagora}$$

$$\text{e per (*) ho che } c^2 - 2ab = c^2 - 2xy - 2xy = c^2 - 4xy$$

$$\text{quindi } -2ab = -4xy$$

$$\text{da cui } ab/2 = xy.$$

6) Soluzione proposta da Ettore C. – classe IV - Liceo Classico “Don Mazza”, Verona



Prima dimostrazione.

È dato il triangolo rettangolo ABC. I cateti sono a, b; l'ipotenusa è c.

Il Raggio della circonferenza inscritta è

$$R = \frac{(a \cdot b)/2}{(a+b+c)/2} = \frac{ab}{(a+b+c)}$$

$$R = \frac{ab}{[(a+b)+c]} \cdot \frac{[(a+b)-c]}{[(a+b)-c]} = \frac{ab \cdot [a+b-c]}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} = \frac{a+b-c}{2}$$

poiché $(a^2 + b^2) - c^2 = 0$, essendo ABC un triangolo rettangolo.

Seconda dimostrazione.

Possiamo considerare la superficie del triangolo rettangolo ABC somma delle superfici:

dei triangoli a due a due uguali ATO + AHO; BTO + BOK;
e del quadrato CHOK di lato r:

$$S_{ABC} = \frac{r \cdot x}{2} \cdot 2 + \frac{r \cdot y}{2} \cdot 2 + r^2 = r \cdot x + r \cdot y + r^2$$

Poiché:

$$a = x + r$$

$$b = y + r$$

$$S_{ABC} = \frac{a \bullet b}{2} = \frac{(x+r) \bullet (y+r)}{2} = \frac{1}{2} [x \bullet y + (r \bullet x + r \bullet y + r^2)]$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [x \bullet y + S_{ABC}] \quad ; \quad 2 \bullet S_{ABC} = [x \bullet y + S_{ABC}]$$

$$S_{ABC} = x \bullet y.$$

[Mancano alcuni passaggi nella parte finale].

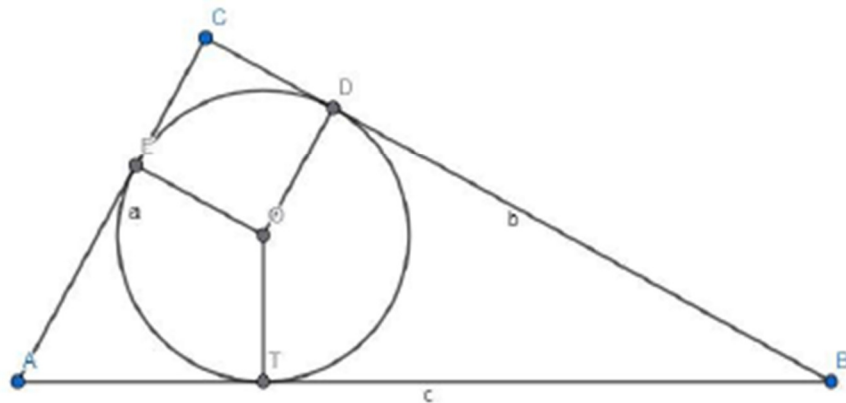
7)Riccardo R., classe 2^aB, LS-Barsanti-Matteucci-Viareggio (LU)

Presenta il file in PDF, contro le indicazioni date.

Flatlandia - Problema

ABC è un triangolo rettangolo, con l'angolo retto in C.

1. Indicate con a, b le misure dei cateti e con c quella dell'ipotenusa, dimostrare che il raggio della circonferenza inscritta misura: $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
2. Chiamato T il punto di tangenza tra l'ipotenusa e la circonferenza inscritta e indicate con x e y le misure dei segmenti AT e TB (vedi figura), dimostrare che l'area del triangolo è xy.



Ipotesi:

ABC=triangolo rettangolo

CD= isoscele

AB=c

AC=a

CB=b incentro di ABC

OT≅ r

T=AB ∩ γ

Tesi:

$$OT \cong \frac{1}{2}(AB+CB-AB)$$

~~AB=x~~

$$AB = x + y$$

$$TB=y$$

Dimostrazione

Si riprende l'equazione precedente

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xr + rx + ry + r^2}{2}$$

per il Teorema di Pitagora: $(x+r)^2 + (y+r)^2 = (x+y)^2$



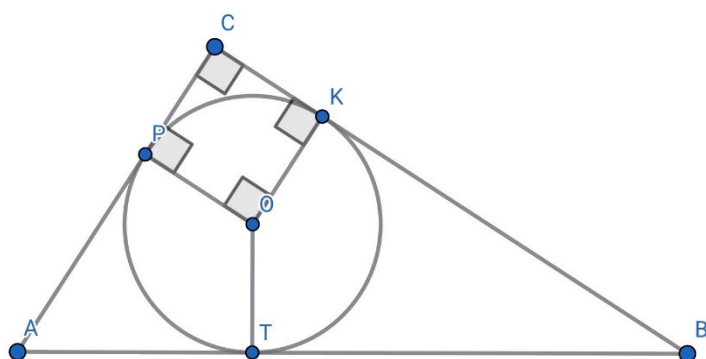
$$x^2 + r^2 + 2xr + y^2 + r^2 + 2yr = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(2r^2 + 2xr + 2yr)/2 = 2xy/2$$

$$r^2 + xr + yr = xy$$

$$A = (xy + rx + ry + r^2)/2 \quad rx + ry + r^2 = xy \text{ per il Teorema di Pitagora}$$

$$A = \frac{xy + xy}{2} = \frac{2xy}{2} = xy \text{ quindi } A=xy$$



[L'inizio è molto prolisso]

Dimostrazione:

Consideriamo i punti P, punto di intersezione fra AC e la circonferenza inscritta; e K, punto di intersezione fra CB e la circonferenza inscritta.

$\angle CPO$ e $\angle CKO$ sono retti perché i segmenti AC e BC sono tangenti alla circonferenza

Nel quadrilatero POKC si ha che:

- $\angle PCK = \angle CPO = \angle CKO = 90^\circ$, quindi $\angle POK = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$
- I lati PO e CK sono paralleli perché sono entrambi perpendicolari a AC
- I lati PC e OK sono paralleli perché sono entrambi perpendicolari a BC

POKC è un parallelogramma perché i suoi lati opposti sono paralleli, quindi i lati opposti sono congruenti e $PO = OK = KC = PC$ per proprietà transitiva.

Avendo tutti i lati e gli angoli congruenti, POKC è un quadrato.

Cerchiamo di dimostrare che l'equazione $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$ sia sempre vera:

Con $a = AC$, $b = BC$ e $c = AB$ possiamo considerare i lati del triangolo come: $a = AP + PC$, $b = BK + KC$, $c = AT + TB$.

$$\text{Quindi } r = \frac{1}{2}(AP + PC + BK + KC - AT - TB)$$

Poiché $PC = CK = r$ perché sono lati del quadrato POKC, $AP = AT$ e $BT = BK$ perché segmenti di tangenza condotti dallo stesso punto alla circonferenza inscritta al triangolo, possiamo riscrivere l'equazione come:

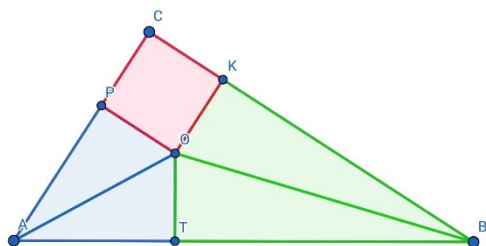
$$r = \frac{1}{2}(2r + \underline{AP} - \underline{AP} + \underline{KB} - \underline{KB})$$

$$r = \frac{1}{2}2r$$

$r=r$ che è sempre vera indifferentemente dalla lunghezza dei lati del triangolo.

[Questa non è una dimostrazione, ma una verifica che la formula è corretta].

Dimostriamo che l'area del triangolo sia xy , con $x=AT$ e $y=TB$:



L'area del triangolo ABC (A) è $\frac{BC \times AC}{2}$ ma possiamo considerarla anche come la somma dei poligoni ATO, AOP, TOB, OBK, POKC.

Poiché:

- L'area dei triangoli AOP e AOT è la stessa perché le loro basi (AT e AP, segmenti di tangenza condotte da A) sono congruenti così come le loro altezze (PO e OT, raggi della circonferenza inscritta).
- L'area dei triangoli TOB e OBK è la stessa perché le loro basi (TC e KC, segmenti di tangenza condotte da C) sono congruenti così come le loro altezze (OK e OT, raggi della circonferenza inscritta).
- L'area del quadrato POKC è r^2

Con $AT=x$ e $TB=y$

$$A = \frac{BC \times AC}{2} = 2 \frac{x \times r}{2} + 2 \frac{y \times r}{2} + r^2$$

$$\frac{BC \times AC}{2} = xr + yr + r^2$$

Consideriamo BC come CK+KB che è uguale a $y+r$

Consideriamo AC come AP+PC che è uguale a $x+r$

$$\frac{(y+r)(x+r)}{2} = xr + yr + r^2$$

$$\frac{xy + yr + xr + r^2}{2} = \frac{2yr + 2xr + 2r^2}{2}$$

$$xy + yr + xr + r^2 = 2yr + 2xr + 2r^2$$

$xy = xr + yr + r^2$ (Che come dimostrato prima è la somma delle aree dei poligoni che formano il triangolo ABC).

$$xy = A.$$