FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di marzo 2026 - Commento alle soluzioni ricevute

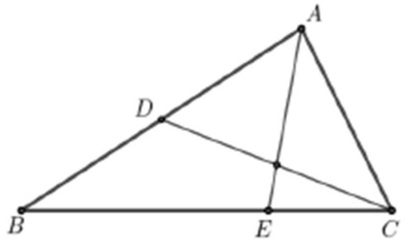
Il testo del problema

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 2 al 23 marzo)

In un triangolo ABC, sia CD la mediana relativa al lato AB ed E un punto del lato BC tale che $BE = 2\ EC$ (vedi figura, non in scala). Sapendo che gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{EAD}$ hanno la stessa ampiezza:

a) determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CAB}$;

b) si supponga ora che, oltre alle ipotesi del problema, l'angolo $\widehat{ADC}$ sia 45° e che AC misuri 3. Determinare l'area del quadrilatero $ADEC$.



Commento

Il problema di marzo chiedeva di dimostrare che un dato triangolo, di cui si conosceva una mediana e un'altra ceviana, era necessariamente rettangolo.
Successivamente occorreva determinare, nota la misura di un cateto e di un angolo, l'area di un particolare quadrilatero ottenuto nel triangolo rettangolo stesso.

Abbiamo ricevuto soltanto due risposte, da queste scuole:

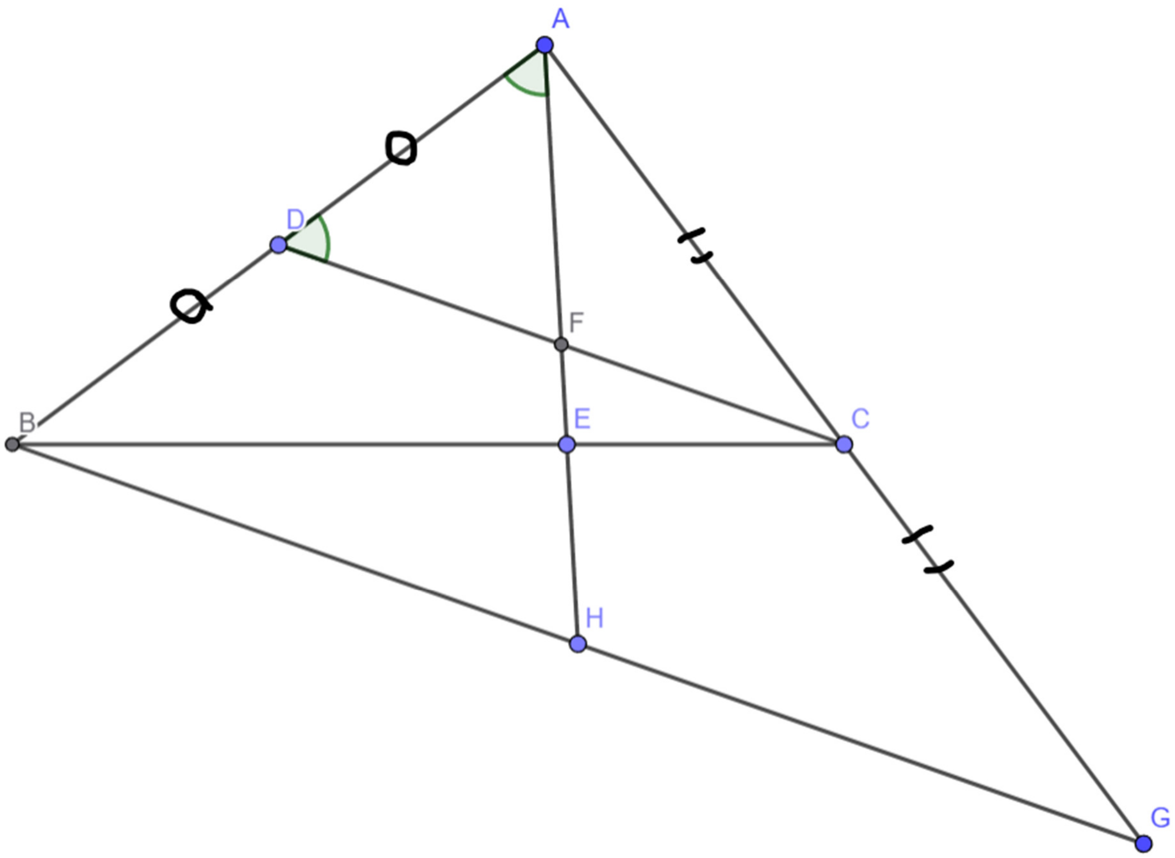
- I.I.S. Liceo Scientifico "G. Bruno-R. Franchetti", Mestre Venezia (VE)
- Liceo Scientifico "A. Rosmini", Rovereto (TN)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della privacy mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno inviato le soluzioni.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata da: Gianmaria O. - LS Classe 4E, I.I.S. "G. Bruno e R. Franchetti" Mestre-VE

[La soluzione della prima parte è corretta, mentre non viene risolta la parte b) dove viene calcolata solo l'area del triangolo iniziale].



a) Sia F l'intersezione tra i segmenti AE e CD, si prolunghi il segmento AC in modo da formare un segmento AG tale che AC=CG, successivamente si tracci il segmento BG e venga chiamato H il punto di intersezione tra il segmento BG e il prolungamento del segmento AE.

È noto che il baricentro divide ciascuna mediana in due segmenti, di cui quello con origine nel vertice è il doppio dell'altro, dunque, dato che BC è mediana del triangolo ABG per costruzione e BE=2EC per ipotesi, il punto E è baricentro del triangolo ABG, [e] di conseguenza [che] AH, poiché passa per E, è anch'essa mediana [di quale triangolo?].

$DC \parallel BG$, poiché DC è congiungente dei punti medi, da qui ricaviamo che ∠ADC=∠ABG, per ipotesi ∠ADC=∠EAD, per la proprietà transitiva ∠BAH=∠ABG (∠EAD e ∠BAH sono lo stesso angolo), poiché ha gli angoli alla base congruenti, il triangolo ABH è isoscele [rispetto a quale lato?].

In particolare da ciò ricaviamo che $AH = BH \Rightarrow AH = \frac{1}{2} \cdot BG$, essendo H punto medio di BG, quindi, sapendo che la mediana di un triangolo è uguale a metà del suo lato relativo se e solo se il triangolo è rettangolo nel vertice da cui viene condotta, ∠CAB=90°.

b) $180° = \angle ADC + \angle CAD + \angle ACD \Rightarrow 180° = 45° + 90° + \angle ACD \Rightarrow \angle ACD = 45°$, per la proprietà transitiva ∠ACD=∠ADC, dunque il triangolo ADC è isoscele, in particolare AD=AC=3, essendo D punto medio di BA sappiamo che BA=2AC=2*3=6.
CAB è un triangolo rettangolo, perciò possiamo calcolare la sua area tramite il mezzo prodotto dei cateti: $S_{CAB} = \frac{AC \cdot BA}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$. [La richiesta non era questa].

2)Soluzione inviata da: Viola G., 2^A, Liceo Rosmini, Rovereto (TN)

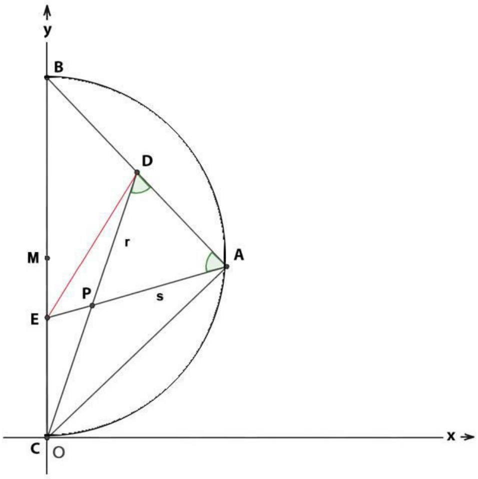
Ha inviato delle immagini e non il file Word!

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 2 al 23 marzo)

In un triangolo ABC, sia CD la mediana relativa al lato AB ed E un punto del lato BC tale che $BE = 2\ EC$ (vedi figura, non in scala). Sapendo che gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{EAD}$ hanno la stessa ampiezza:

a) determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CAB}$;

b) si supponga ora che, oltre alle ipotesi del problema, l'angolo $\widehat{ADC}$ sia 45° e che AC misuri 3. Determinare l'area del quadrilatero $ADEC$.



a) Disegno il triangolo ABC nel primo quadrante di un sistema cartesiano ortogonale OXY con il vertice C nell'origine e il vertice B sull'asse Y.Chiamo a e b le coordinate del vertice A e L la lunghezza del lato BC.Posso scrivere ore le coordinate dei punti A,B,C,D,E usando queste ipotesi e quelle del problema. A(a,b) ; B(0.L) ; C(0,0) ; E(0,L/3) ; D(a/2,(b+L)/2).
Dal disegno sembra che l'angolo CAB sia di 90°,cerco quindi di verificarlo.Per ipotesi gli angoli ADC e EAD sono uguali, allora se chiamo P il punto di incontro tra CD e AE, il triangolo ADP è isoscele su base AD per cui sarà anche AP = DP. Siano **r** e **s** le rette che contengolo nell'ordine i segmenti CD e AE,allora le coordinate di P saranno il punto di incontro tra **r** e **s**.La retta **r** passa per l'origine e la sua equazione è allora del tipo y=mx, imponendo il passaggio per D abbiamo: (b+L)/2=m(a/2) da cui m = (b+L)/a. la retta **r** ha quindi equazione **y=x(b+L)/a**.L'equazione esplicita dela retta **s** è del tipo: y=nx+q e il passaggio per E determina q=L/3.Imponendo il passaggio per A abbiamo: b=na +L/3 da cui n=(3b-L)/3a.

Da questo segue che **s** ha equazione **y=x(3b-L)/3a + L/3**.Per trovare le coordinate di P metto a sistema le due equazioni risolvendo con il metodo del confronto.
x(b+L)/a = x(3b-L)/3a +L/3. Raccogliendo a sinistra la parte con x ottengo x(4L)/3a = L/3 da cui x=a/4 e per sostituzione nell'equazione di **r**, y= (b+L)/4.Posso quindi scrivere P(a/4,(b+L)/4).Uso ora la formula per la distanza tra due punti per ottenere (AP)^2 e (DP)^2.

(AP)^2 = (a/4 - a)^2 + ((b+L)/4 - b)^2 = (9/16) a^2 +b^2 + ((b+L)/4)^2 - (1/2)(b+L)b

(DP)^2 = (a/2- a/4)^2 + ((b+L)/2-(b+L)/4)^2 = (1/16) a^2 + ((b+L)/4)^2

Uso ora l'ipotesi sul triangolo isoscele ADP (cioè AP = DP) ponendo (AP)^2 - (DP)^2 = 0

e ottengo: (8/16) a^2 + b^2 - (1/2)(b+L)b = 0 e semplificando : **a^2 + b^2 - bL = 0**. (*)

Osservo che posso scrivere b^2 - bL come : (b - L/2)^2 - (L/2)^2 e a come a - 0

quindi l'espressione (*) diventa : (a - 0)^2 + (b - L/2)^2 = (L/2)^2. Questo vuol dire che il vertice A deve stare sempre a distanza L/2 dal punto M(0, L/2) e questo accade se A sta su una circonferenza di raggio L/2 con centro in M. Ora dal fatto che M è il punto medio di BC segue che BC è il diametro di quella circonferenza e che quindi il triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza e di conseguenza è un triangolo rettangolo in A e quindi **CAB = 90°**.

b) Posto AC =3 se ADC = 45° il triangolo ADC è isoscele sulla base CD quindi AD=AC = 3.
Segue che AB=6 e per il teorema di Pitagora in ABC, BC = √45 = L.
L'area di ADEC è la differenza tra l'area del triangolo ABC e quella del triangolo EBD.
Se in EBD prendo per base EB noto che l'altezza relativa a questo lato è l'ascissa del punto D cioè a/2.
Ricordo ora la relazione (*) e il fatto che a^2 + b^2 = AC^2 = 9; da questo segue che b = 9/L = 9/√45 e a^2 = 9 - 81/45 =36/5 da cui a = 6/√5.
Abbiamo allora Area(ADEC)=Area(ABC)-Area(EBD) = 9 - (2/3)√45)(6/√5)/2 = 9 - (√45/3)(3/√5) = = 9 - √45/√5.
Ora dato che (√45/√5)^2 = 45/5=9 segue che √45/√5 = 3 e quindi **Area (ADEC)= 9-3 = 6**.

[Nella prima parte usa la geometria analitica, che forse non serviva… Quindi, la soluzione, anche se corretta, è prolissa. La seconda parte è corretta.
Purtroppo non si riesce a inserire eventuali commenti perché la studentessa ha presentato la soluzione sotto forma di immagine, invece di un testo, come è richiesto.]