FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di ottobre 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

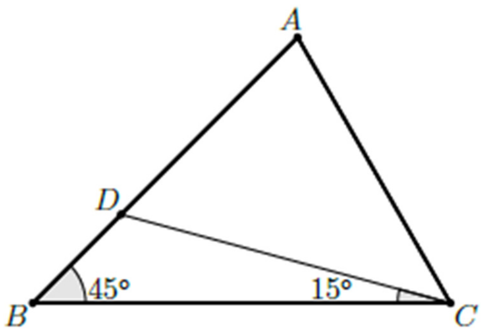
Il testo del problema

Flatlandia - Problema (inviare le soluzioni dal 6 al 27 ottobre 2025)

Sul lato AB di un triangolo ABC si considera un punto D in modo che $AD = 2\,DB$ (vedi figura). Si sa che l'angolo $\widehat{ABC}$ misura $45°$ e che l'angolo $\widehat{BCD}$ misura $15°$.

a) Trovare l'ampiezza dell'angolo in A.

b) Nell'ipotesi che AB misuri 3, determinare il perimetro del triangolo ABC.



Commento

Il problema poneva due domande su un particolare triangolo, che poteva essere scomposto - in base ai dati assegnati - in due triangoli rettangoli notevoli (con angoli di 45° o di 60°), tracciando la retta passante per *A* e perpendicolare a *DC* (vedi figura). Pertanto nella risoluzione si poteva evitare di usare la trigonometria, come in quasi tutti i problemi di "Flatlandia".

Abbiamo ricevuto sei risposte da studentesse e studenti delle seguenti scuole:

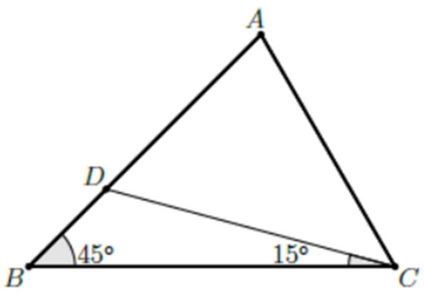
- I.I.S.S. "Charles Darwin", Roma
- I.I.S. - Liceo Scientifico "G. Bruno - R. Franchetti", Mestre (VE)
- Liceo Scientifico "Morgagni", Roma
- Liceo Scientifico "Principe di Napoli", Assisi (PG): 2 soluzioni
- Liceo Scientifico "Foscarini", Venezia

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della privacy mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno mandato le soluzioni.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata da: Enoch J., 4^DL, I.I.S.S. Charles Darwin, Roma

[Commento: soluzione inutilmente complicata; non era necessario usare la Trigonometria... con angoli di 45° e di 60°. Evidenziati alcuni errori e imprecisioni, soprattutto nella parte finale.]



Dati:
AD=2DB
∠ABC= 45°
∠BCD=15°
∠BAC=?
AB=3
P_{ABC}=?
Chiamiamo l'angolo ∠ACD = α
[Applicando due volte il teorema dei seni, otteniamo:] ~~Rapporto dei lati lungo una ceviana (ottenuta applicando due volte il teorema dei seni)~~

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BC\cdot\sin\angle BCD}{AC\cdot\sin\angle ACD}$$

Sostituendo con i dati, ma non avendo nessun valore dei lati si usa il rapporto AD=2DB

$$\frac{1}{2}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{\sin 15°}{\sin\alpha}$$

essendo sinα quello che ci interessa allora facciamo diventare l'equazione sinα =

$$\sin\alpha=2\frac{BC}{AC}\sin 15°$$

Dopo di che useremo il teorema dei seni

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}$$

Sostituiamo i dati

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin 45°}{\sin(135°-\alpha-15°)}$$

Dopo una serie di calcoli diventerà

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{6}\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$$

Sostituendo questo in quello di prima si ottiene [mancano i calcoli]

$$\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{6}\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Alla fine si ottiene [mancano i calcoli] $\alpha=45°$ quindi ∠A sarà 180°-45°-45°-15°=75°
Adesso procediamo con il calcolo del perimetro con il teorema dei seni

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$$

Sostituendo i dati

$$\frac{3}{sin\,60°}=\frac{BC}{sin\,45°}=\frac{AC}{sin\,75°}$$

$$BC=\sqrt{6}$$

$$AC=\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$$

Adesso avendo tutti i lati il perimetro viene

$$\cancel{Pabc}$$

$$p(ABC)=3+\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}.$$

2) Soluzione inviata da Gianmaria O.- Classe 4E, I.I.S. LS G. Bruno e R. Franchetti, Mestre-VE

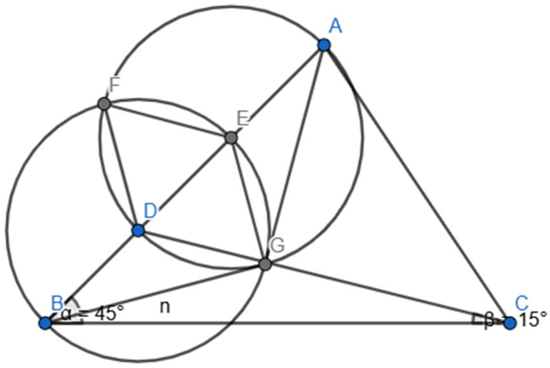
[Commento: La soluzione (trigonometria) viene omessa, perché scritta in modo poco leggibile (non viene usato un editor per le equazioni e per le formule…) e con alcuni errori].

3) Soluzione inviata da Aurora T., classe 4^L, e Flavio D., classe 2^B, Liceo Scientifico Morgagni, Roma

[Commento: la prima parte è svolta molto bene.]

SOLUZIONE

a) Chiamato E il punto medio del segmento AD, in modo tale che $EA \cong DE \cong BD \cong r$, si considerino le circonferenze C_1 e C_2 di raggio r e di centri rispettivamente D ed E. Chiamiamo inoltre G il punto di intersezione delle due circonferenze interno al triangolo $\triangle ABC$.



Il triangolo $\triangle AGD$ è inscritto nella circonferenza C_2 e il lato AD passa per il centro E, per cui $\triangle AGD$ è rettangolo, e l'angolo $D\hat{G}A$ è retto (alternativamente si può anche notare che la mediana relativa ad AD è congruente alla metà di AD stesso, quindi $\triangle AGD$ è rettangolo). Allo stesso tempo, il triangolo $\triangle EDG$ è equilatero, dato che $DG \cong EG \cong DE \cong r$, per cui l'angolo $E\hat{D}G = 60°$.

Dato che il triangolo $\triangle AGD$ è rettangolo si ha che $A\hat{D}G + G\hat{A}D = 90°$, perciò $G\hat{A}D = 30°$.

L'angolo $E\hat{D}G = 60°$ è angolo al centro della circonferenza C_1 insistente sulla corda EG. Quindi, essendo l'angolo $E\hat{B}G$ un angolo alla circonferenza insistente sulla medesima corda, si ottiene che $E\hat{B}G = 30°$.

Di conseguenza, $A\hat{B}G \cong G\hat{A}D = 30°$ e $\triangle ABG$ è isoscele, per cui $BG \cong GA$.

Allora, dato che $A\hat{B}G + G\hat{B}C \cong A\hat{B}C = 45°$, si ha che $G\hat{B}C \cong 15° \cong B\hat{C}D$. Ne deriva che il triangolo $\triangle GBC$ è isoscele e $BG \cong GC \cong AG$.

Quindi $\triangle AGC$ è isoscele.

Come visto in precedenza, l'angolo $D\hat{G}A$ è retto, ed essendo $A\hat{G}C$ suo supplementare è anch'esso retto, quindi si ha che $\triangle AGC$ è rettangolo.

$\triangle AGC$ è rettangolo e isoscele, quindi i suoi angoli interni acuti hanno ampiezza 45°, pertanto$C\hat{A}B \cong G\hat{A}D + C\hat{A}G = 30° + 45° = 75°$. c.v.d.

Inoltre, l'angolo $B\hat{C}A \cong B\hat{C}G + G\hat{C}A = 15° + 45° = 60°$.

b) Sappiamo che $A\hat{B}C = 45°$, $B\hat{C}A = 60°$, $B\hat{A}C = 75°$; il perimetro del triangolo è

$2p = AB + BC + CA$,

con $AB = 3$. Adesso, scriviamo gli altri due lati in funzione di AB utilizzando semplici principi trigonometrici [commento: non occorreva scomodare la Trigonometria per angoli di 45° e di 60°]:

$$AB\, sin\, \cancel{sin}\, (45°) = CA\, sin(60°) \Rightarrow CA = \frac{sin\,(45°)}{sin\,(60°)} AB = \frac{\sqrt{6}}{3} AB = \sqrt{6}$$

poiché entrambi i membri sono espressioni della lunghezza dell'altezza relativa a BC del triangolo ABC.

Invece, possiamo scrivere BC come somma di due lunghezze nel seguente modo:

$$BC = AB\, cos(45°) + AC\, cos(60°) = AB \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

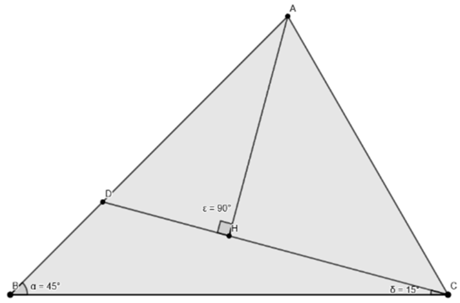
Quindi possiamo ora sostituire i valori trovati nella formula del perimetro:

$$2p = AB + BC + CA = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2} \approx 8{,}796.$$

[Commento: non occorreva approssimare la soluzione].

4) Soluzione inviata da Francesco-B.-Liceo Scientifico "Principe di Napoli", Assisi (PG)

[Commento: la risoluzione è corretta e ben motivata. Purtroppo non viene usato un equation editor per scrivere le formule].



a) Sia H la proiezione di A su CD, si ha

<ADC = 15° + 45° = 60° (teorema dell'angolo esterno)

quindi <DAH= 90°- 60°= 30°

Dato che AD=2x ⇒ AH= x$\sqrt{3}$ e DH= x (ADH è metà di un triangolo equilatero di lato 2x)

Per ipotesi DB= (½)AD = x ⇒ BDH è isoscele (DH=DB)

e <DHB=<DBH = (180°- <BDH)/2 = <ADH/2 =30°

ma allora anche BHA è isoscele (<BAH = <ABH = 30°)

quindi AH=BH.

Poiché <HBC = <DBC - <DBH = 45°- 30° = 15°

Segue che <HCB = <CBH = 15° quindi BHC è isoscele, e così BH=CH

e AH=CH.

Dato che <AHD = 90° anche AHC= 90° quindi AHC è un triangolo rettangolo isoscele.

Allora <ACH=<CAH = 45° da cui si ha <BAC = <BAH + <HAC = 30°+ 45° = 75°

b) Se AB= 3 allora x=1

quindi AH = x$\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ = CH, AC = $\sqrt{2}$ CH = $\sqrt{6}$

e CD= CH+HD = $\sqrt{3}$ +1 mentre AD= 2.

Si noti ora che ABC ~ ADC per il primo criterio di similitudine (<ABC=<ACD e <BAC in comune)

ma allora CD/BC = AD/AC ovvero ($\sqrt{3}$ +1)/BC = 2/$\sqrt{6}$

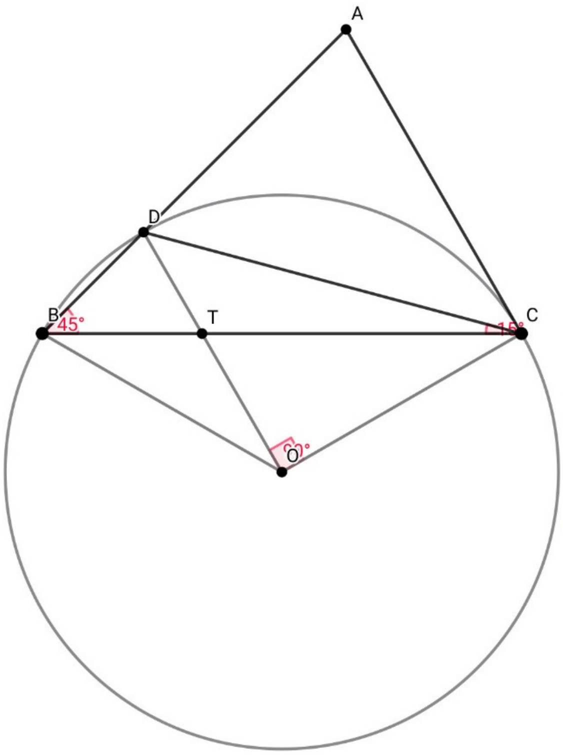
da cui BC= ($\sqrt{3}$ +1)$\sqrt{6}$/2.

Infine 2p= AB + BC + CA = 3 +($\sqrt{3}$ +1)$\sqrt{6}$/2 + $\sqrt{6}$.

5)Soluzione inviata da Cecilia Di M., Classe 3D, Liceo Scientifico "Principe di Napoli", Assisi (PG)

[Commento: soluzione svolta molto bene: le poche correzioni sono evidenziate in giallo.].

IPOTESI
ABC triangolo
$AD = 2\ BD$
$\widehat{DBC}$=45°
$\widehat{DCB}$=15°
$AB = 3$



RISOLVO

a) Costruzione: traccio la circonferenza di centro O, circoscritta al triangolo BDC.

$\widehat{DBC}$ è angolo alla circonferenza che insiste su $\overset{\frown}{CD}$.
$\widehat{DOC}$ è angolo al centro che insiste su $\overset{\frown}{CD}$ =>
$\widehat{DOC}$= 2$\widehat{DBC}$ =90°.
Il triangolo DOC è isoscele perché DO e OC sono raggi
=> $\widehat{ODC}$ = $\widehat{OCD}$=45°.
$\widehat{TCO}$= $\widehat{DCO}$ - $\widehat{DCT}$ = 45°-15°= 30°.
$\widehat{DTB}$ è angolo esterno di $\widehat{DTC}$ => $\widehat{DTB}$ = 45°+15°= 60°
=> $\widehat{BDT}$= 75°
Il triangolo BOC è isoscele perché BO e OC sono raggi
=> $\widehat{BCO}$ = $\widehat{CBO}$= 30°.
$\widehat{DCB}$ è angolo alla circonferenza che insiste su $\overset{\frown}{DB}$.
$\widehat{DOB}$ è angolo al centro che insiste su $\overset{\frown}{DB}$ => $\widehat{DOB}$ = 2$\widehat{DCB}$ = 30°.
Il triangolo BTO è isoscele su base BO perché $\widehat{TOB}$ = $\widehat{TBO}$ = 30° => BT=TO.
Il triangolo TCO è metà di un triangolo equilatero perché $\widehat{OTC}$ =60° e $\widehat{TCO}$ = 30° => TC= 2TO=2TB.
I triangoli ABC e BDT sono simili per il 2° criterio di similitudine perché hanno $\widehat{DBC}$ in comune e $\frac{BD}{AB} = \frac{BT}{BC} = \frac{1}{3}$. => $\widehat{BDT}$ = $\widehat{BAC}$ = 75°.

b) Traccio l'altezza AH relativa a BC.

$\widehat{BAH}$ = 90°- $\widehat{HBA}$ = 90°- 45°= 45° => ABH è metà quadrato e AH = BH= $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
Il triangolo AHC è metà triangolo equilatero perché $\widehat{HCA}$= 60° e $\widehat{HAC}$= 30° =>
=> AC= $\frac{2AH}{\sqrt{3}} = 2\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ => HC= $\frac{1}{2}$ AC => HC= $\frac{\sqrt{6}}{2}$
BC = BH+ HC = $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.
2p(ABC)= AB + BC+ AC = 3+$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6} = 3 + \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$ = 3+ $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.

6) Soluzione inviata (in ritardo) da Daniele J., 5^BE, Liceo Marco Foscarini, Venezia

[Commento: Si omette la soluzione (trigonometrica), scritta a mano e scannerizzata come immagine, che non permette di inserire dei commenti. Le soluzioni vanno scritte in Word, usando un equation editor per scrivere le formule e vanno inviate in Word, non in PDF.]