Sessione ordinaria 1997

Seconda prova scritta

# Y557 - ESAMI DI MATURITÁ SCIENTIFICA SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

**La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.**

**l.** In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia data la parabola $\gamma$ di equazione $y=x^2$ e sia P un suo punto di ascissa $\lambda \neq 0$ ed r la parallela per P all'asse y.

Siano $\gamma_1$ e $\gamma_2$ le parabole con asse la retta r, vertice in P e stessa distanza focale di $\gamma$ (distanza fuoco-direttrice, pari a $\frac{1}{2|a|}$ per la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$).

Il candidato:

a) scriva in funzione di $\lambda$ le equazioni di $\gamma_1$ e $\gamma_2$, essendo $\gamma_1$ la parabola che incontra $\gamma$ solo in P;

b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano $\gamma$ in $\gamma_1$ e $\gamma$ in $\gamma_2$;

c) dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi;

d) fissato $\lambda = 1$ e dette T, $T_1$, $T_2$ le rispettive intersezioni di $\gamma$, $\gamma_1$ e $\gamma_2$ con la retta di equazione x-h=0, studi la funzione $z = \frac{\overline{TT_1} + \overline{T_1T_2}}{\overline{TT_2}}$ al variare di h, e se ne tracci il relativo grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali O′hz.

---

**2.** In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia r la retta di equazione x-1=0 e P un suo punto. Siano A e B i punti d'intersezione della retta OP con la circonferenza di centro P e raggio $2\sqrt{2}$.

Il candidato:

a) verifichi che il luogo di A e B, al variare del punto P su r, è dato dalle curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ rispettivamente di equazione $y=f_1(x)$ e $y=f_2(x)$, essendo:

$$f_1(x) = +\frac{x}{x-1}\sqrt{7+2x-x^2} \quad e \quad f_2(x) = -\frac{x}{x-1}\sqrt{7+2x-x^2}$$

b) determini l'insieme E di esistenza della funzione $f_1(x)$, gli insiemi in cui essa assume valore positivo, negativo o nullo, gli eventuali asintoti, il valore $x_0$ in cui ha un massimo relativo, e dimostri che le tangenti a $\gamma_1$ nei punti le cui ascisse sono gli estremi di E nei quali $f_1(x)$ è definita, sono parallele all'asse y;

c) disegni la curva $\gamma_1$ e, quindi, la curva $\gamma_2$;

d) detta t la tangente alla curva $\gamma_1$, nel suo punto $M(x_0, f(x_0))$ determini l'ulteriore intersezione di t con $\gamma_1$;

e) detta S l'area della regione finita di piano compresa tra $\gamma_1$, l'asse delle x e la parallela all'asse y per il punto M, descriva una procedura che consenta di calcolare, mediante un metodo d'integrazione numerica a sua scelta, i valori approssimati di S e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

---

**3.** Si consideri in un piano $\alpha$ un rettangolo ABCD i cui lati BC ed AB misurano rispettivamente **a** e **2a**. Sia AEF, con $E \in AB$ ed $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base AE ha misura 2r.

Il candidato:

a) dimostri che una retta s parallela ad AB, a distanza x da essa, interseca i triangoli AEF ed AEC secondo segmenti uguali;

b) detta $C_1$ la circonferenza di diametro AE e appartenente al piano $\gamma$ passante per AB e perpendicolare ad $\alpha$, e detti $T_1$ e $T_2$ i coni di base $C_1$ e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostri che le sezioni $C_1'$ e $C_2'$ di detti coni con il piano $\gamma'$, passante per la retta s e parallelo al piano $\gamma$, sono circonferenze;

c) determini i volumi dei coni $T_1$ e $T_2$;

d) determini, per via sintetica o analitica, il valore di x per il quale $C'_1$ e $C'_2$ sono tangenti esternamente.

---

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.