ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001

Indirizzo sperimentale: P.N.I.

Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.

Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\dfrac{PA}{PB}=k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

c) posto X, appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\widehat{A}C$, si illustri l'andamento della funzione $y=f(x)$ con $f(x)=\left(\dfrac{XB}{XA}\right)^2$ e $x=tg\alpha$.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Per una impostazione di geometria analitica conviene fissare un sistema di riferimento Oxy con origine nel punto medio C del segmento AB ed il segmento AB appartenente all'asse delle ascisse. Gli estremi A e B del segmento avranno pertanto come coordinate $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$.

Punto a

Un punto $P(x, y)$ del piano appartiene al luogo geometrico se e soltanto se:

$$\frac{PA}{PB}=k \quad (\text{con } k>0).$$

Otteniamo:

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=k.$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene l'equazione equivalente alla precedente:

$$(1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2+2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2=0.$$

Se $k=1$, si ottiene l'equazione $x=0$, cioè l'asse del segmento AB (circonferenza degenere).

Se $k\neq 1$, l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+2a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)x+a^2=0$$

che rappresenta infinite circonferenze, che può essere considerato un fascio se si usa un parametro diverso da k, ponendo ad esempio $h=k^2$ (circonferenze di Apollonio), di centro generico nel punto

$$\left(a\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right),\ 0\right) \text{ e raggio } \ r=\frac{2ak}{\left|k^2-1\right|}.$$

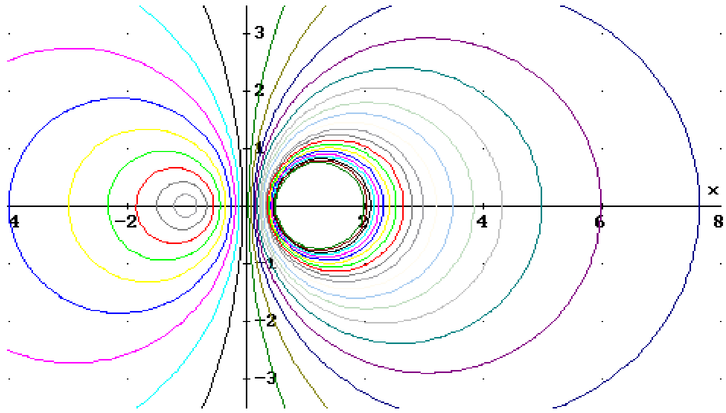

Figura 1. Grafico del fascio di circonferenze (ottenuto con Derive)

Punto b

Il luogo geometrico dei punti che “vedono” il segmento AC secondo un angolo di 45° è formato dalla unione di due archi (“archi capaci”) di circonferenza simmetrici rispetto alla retta della corda AC. Infatti AC deve formare con il centro degli archi di circonferenza un angolo retto.; quindi la corda AC deve essere il lato di un quadrato inscritto in una circonferenza. Poiché $\overline{AC}=a$, e $a=2r\sin\alpha$, ne segue che il raggio della circonferenza deve essere:

$$r=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

I centri degli archi di circonferenza cercati, pertanto, devono essere a distanza $\frac{a}{2}$ dall’asse delle ascisse. Avranno pertanto per centri $O_1\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ e $O_2\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$.

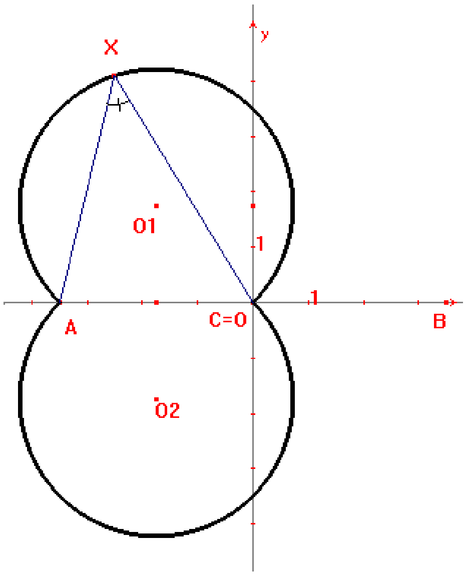

Figura 2. Grafico ottenuto con Cabri-géomètre.

Data la simmetria del luogo γ rispetto all’asse delle ascisse, la sua equazione sarà:

$$x^2+y^2+ax-a|y|=0.$$

Il luogo è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, formato da due archi di circonferenza di centri rispettivamente nei punti $O_1\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ e $O_2\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

Punto c

Consideriamo il punto *X* nel semipiano delle ordinate non negative. Calcoliamo *XA* applicando il teorema della corda nell'arco di circonferenza del luogo γ appartenente al semipiano delle ordinate non negative.

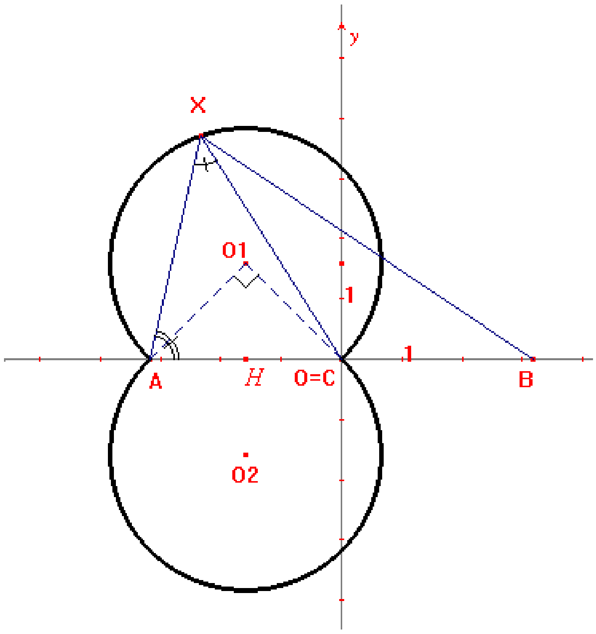

Figura 3. Luogo γ richiesto nel punto b).

Si ottiene:

$$\overline{XA} = a\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right) = a\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right).$$

Applicando il teorema del coseno (di Carnot) al triangolo *ABX*, si ottiene:

$$\overline{XB}^2 = \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{AX}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{XB}^2 = a^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + 4a^2 - 4a^2(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha,$$

da cui

$$\overline{XB}^2 = a^2\left(5\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right).$$

Pertanto la funzione richiesta diventa:

$$f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2 = \frac{5\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2}$$

con $0 \le \alpha < \frac{3}{4}\pi$.

Dividendo al numeratore ed al denominatore per $\cos^2\alpha$ (supposto non nullo, quindi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$), si ottiene:

$$f(x) = \frac{5\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 1}{\left(\tan\alpha+1\right)^2}$$

Sostituendo $x = \tan\alpha$, si arriva all'espressione della funzione richiesta:

$$f(x)=\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2},$$

con $x<-1$; $x\geq 0$ (tenuto conto delle condizioni di variabilità dell'angolo α).

La curva ha un asintoto verticale di equazione $x=-1$ e un asintoto orizzontale di equazione $y=5$.

La derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{4(3x-1)}{(x+1)^3}$$

La funzione ha un minimo assoluto per $x=\frac{1}{3}$; è crescente per $x<-1$; $x>\frac{1}{3}$ e decrescente per $0<x<\frac{1}{3}$.

La derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{24(1-x)}{(x+1)^4}$$

La funzione ha un flesso per $x=1$; è concava per $x>1$ e convessa altrove.

Il grafico della funzione è riportato nella seguente figura:

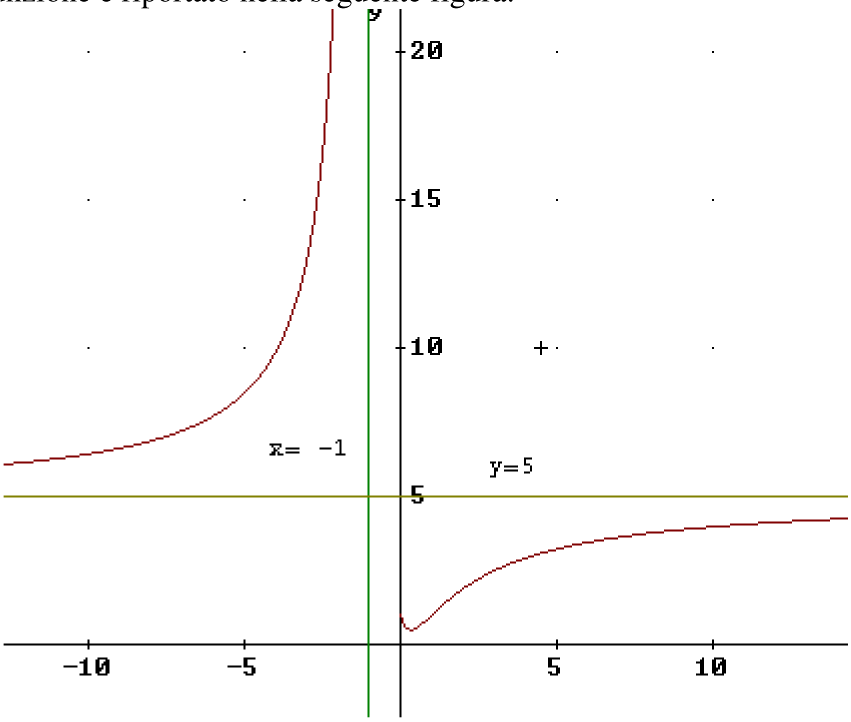

Figura 4. Grafico della funzione richiesta nel punto c) ottenuto con DERIVE.