ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001
Indirizzo sperimentale: PNI
Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$f(x) = x^2 + a\log(x+b)$$

con a e b diversi da zero.

a) si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;
b) si studi e si disegni Γ;
c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;
d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;
e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = \left| x^2 + a\log(x+b) \right|$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto a

Data la funzione

$$f(x) = x^2 + a\ \log(x+b)$$

per trovare i valori di a e di b richiesti imponiamo prima di tutto che

$$x > -b$$

Poiché sappiamo che la funzione deve essere definita anche per $x = 0$, ne segue che $-b < 0$ e in definitiva $b > 0$.

Il testo non lo precisa, ma d'ora in poi supponiamo che la base dei logaritmi sia il numero di Nepero.

Ricaviamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2x + \frac{a}{x+b}.$$

Ponendo le condizioni richieste dal problema, dovendo $f(x)$ passare per l'origine degli assi ed avere un minimo assoluto (e relativo) nel punto $x = 1$ (punto interno al dominio), si ha:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} b = 1 \\ 2 + \dfrac{a}{1+b} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione da studiare diventa quindi:

$$f(x) = x^2 - 4\ \log(x+1)\ .$$

Punto b

La funzione trovata ha per dominio la semiretta aperta $]-1, +\infty[$ e interseca l'asse *x*, oltre che nell'origine degli assi, anche in un altro punto di ascissa $x = \alpha$, con $\alpha = 2{,}1\ldots$

Per verificarlo, si deve risolvere l'equazione:

$$x^2 - 4\ln(x+1) = 0$$

che equivale ad intersecare le funzioni elementari (una parabola e una curva logaritmica che si ottiene da una traslazione verso "sinistra" di 1 della curva $y = \ln x$):

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = \ln(x+1) \end{cases}$$

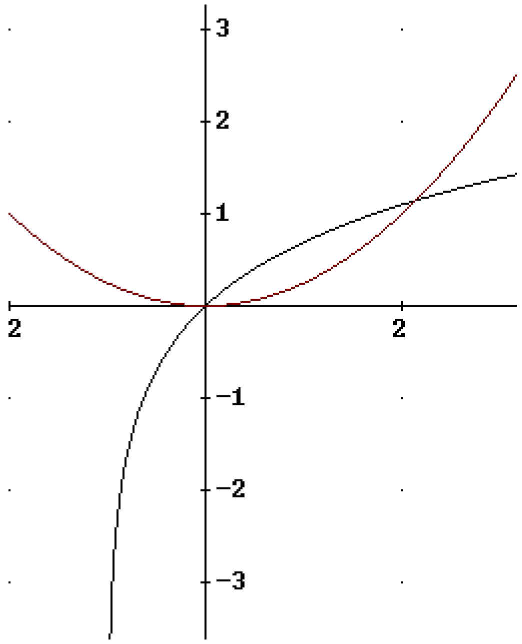

Figura 1. Ricerca grafica di un valore approssimato di α.

Il segno della funzione si ottiene risolvendo la disequazione:

$$x^2 - 4\ln(x+1) \geq 0\ .$$

Si trova che:

$$f(x) > 0 \ \text{ per } \ -1 < x < 0 \text{ e per } x > \alpha\ .$$

Calcolando i limiti della funzione agli estremi del dominio, si trova che

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 - 4\ln(x-1) \right].$$

Per calcolare quest'ultimo limite, che si presenta in forma indeterminata, si può raccogliere e poi applicare la regola di De L'Hospital in una "sottoespressione":

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \left(x - \frac{4\ \ln(x-1)}{x} \right) \right] = +\infty\ .$$

La retta di equazione $x=-1$ è quindi un asintoto verticale per il grafico della funzione, ma non ci sono asintoti obliqui.
La derivata prima della funzione è data:
$$f'(x)=2x-\frac{4}{x+1}=\frac{2(x^2+x-2)}{x+1}.$$
Tale derivata è positiva per $x>1$ ed è negativa in $-1<x<1$. Quindi il punto $x=1$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto), come del reato sapevamo fin dall'inizio. Il minimo vale:
$$f(1)=1-4\ \ln 2\ .$$
La derivata seconda della funzione è:
$$f''(x)=2+\frac{4}{(x+1)^2}.$$
Essendo $f''(x)$ positiva per ogni x nel dominio, segue che la funzione è convessa.
Il grafico è il seguente:

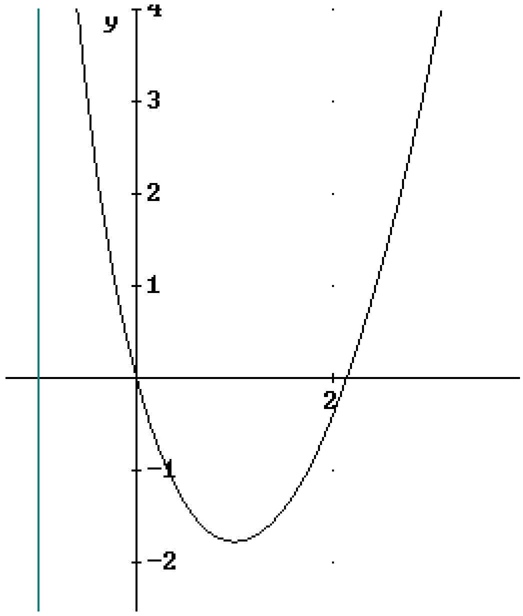

Figura 2. Grafico della funzione $f(x)$ ottenuto con DERIVE.

Punto c
Come si è detto nel precedente punto b), la radice è approssimativamente $\alpha=2{,}1...$ come si ricava con i grafici di due opportune funzioni.
Per determinare una radice approssimata dell'equazione, si può usare uno dei metodi approssimati, come il metodo di bisezione, il metodo delle tangenti (di Newton) oppure quello delle corde. Per applicare questi due ultimi metodi occorre controllare le ipotesi; si può, ad esempio, usare il metodo di Newton perché la funzione è derivabile, con derivata prima positiva nell'intervallo [2, 3] e derivata seconda positiva.
Nel nel testo non viene precisata quale sia l'approssimazione voluta; con 5 iterazioni del metodo di Newton, applicando la formula
$$\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$
a partire da $\alpha_0=b=3$ si trovano 9 cifre corrette dopo la virgola:
$$\alpha\approx 2{,}139098578...$$

Punto d
La retta di equazione $y=y(1)$ diventa

$$y = 1 - 4\ \ln 2 .$$

La simmetria rispetto ad una retta $y = y_0$, parallela all'asse *x*, ha per equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2(1 - 4\ \ln 2) - y \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene l'equazione:

$$2(1 - 4\ \ln 2) - y = x^2 - 4\ln(x+1)$$

che fornisce la seguente espressione per la curva Γ':

$$y = 2(1 - 4\ \ln 2) - x^2 + 4\ln(x+1) .$$

Punto e

Il grafico della funzione

$$y = |f(x)| = |x^2 - 4\ \log(x+1)|$$

diventa ovviamente il seguente:

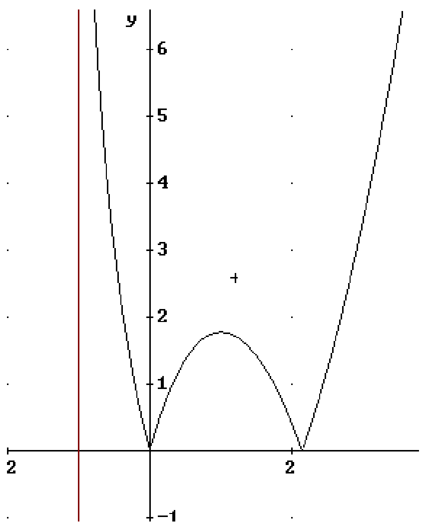

Figura 3. Grafico della funzione $y = |f(x)|$

Il punto di minimo relativo diventa un punto di massimo relativo e si formano due punti angolosi, di non derivabilità, nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = \alpha$.