ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002
Indirizzo sperimentale: P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 1

Due numeri *x* e *y* hanno somma e quoziente uguali a un numero reale *a* non nullo.

Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (*x, y*):

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di *a*;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(*x*, *y*) che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli *y* nel caso che *x* sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Possiamo scrivere il sistema $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases}$ con $a\neq 0$ e $y\neq 0$.

Punto 1)

Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico *Oxy*, possiamo interpretare il sistema come intersezione di un fascio di rette parallele alla bisettrice del II e del IV quadrante (esclusa la bisettrice stessa) e un fascio proprio di rette passanti per l'origine degli assi (escluso l'asse delle ascisse); ogni retta del primo fascio deve di conseguenza essere privata del punto di ascissa nulla.
Fissato il parametro *a*, le rette ottenute si intersecano in uno ed un sol punto P di coordinate:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1} \\ y=\dfrac{a}{a+1} \end{cases}$$

tranne nel caso in cui $a=-1$ per cui le rette ottenute

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ \dfrac{x}{y}=-1 \end{cases}$$

sono parallele e distinte.

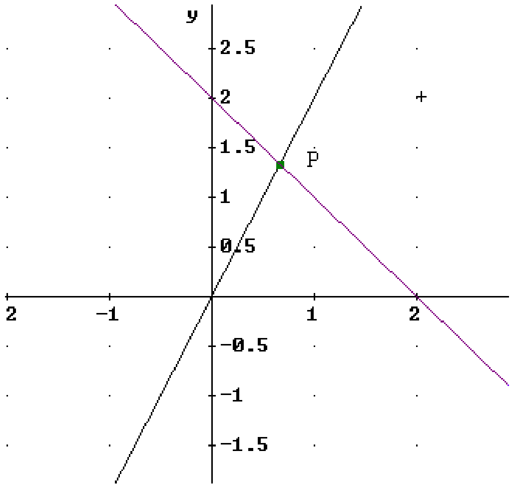

Figura 1. Coppia di rette e loro intersezione

Per $a > 0$ il punto appartiene al primo quadrante; per $a < 0$, il punto si trova nel secondo o nel quarto quadrante.

Punto 2

Dal sistema iniziale si determina l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti γ: $x + y = \frac{x}{y}$, $xy + y^2 = x$, da cui si ricava $x = \frac{y^2}{1-y}$, con $y \neq 1$ e, se si tiene conto delle condizioni iniziali, $y \neq 0$.

Punto 3

Vedremo che il luogo γ è un'iperbole (non equilatera) avente per asintoti le rette $y = 1$ e $y = -x - 1$ dal cui grafico occorre togliere il punto $O(0, 0)$. Non sarebbe difficile studiare il luogo γ, ma per semplicità conviene prima rappresentare il luogo γ', simmetrico di γ rispetto alla retta $y = x$.
L'equazione del luogo γ' si ottiene scambiando le variabili: la sua equazione sarà: $x^2 + xy = y$, ovvero $y = \frac{x^2}{1-x}$, con $x \neq 1$ e, se si tiene conto della condizione iniziale, $x \neq 0$. Ovviamente si tratta ancora di un'iperbole i cui asintoti sono la retta $y = 1$ e la stesso asintoto $y = -x - 1$ dell'iperbole inziale. La derivata prima è $f'(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$ e la derivata seconda $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. La funzione quindi ha un minimo relativo per $x = 0$ e un punto di massimo relativo in $x = 2$. Il centro di simmetria della curva è O'(1, -2). L grafico è riportato nella figura 2.

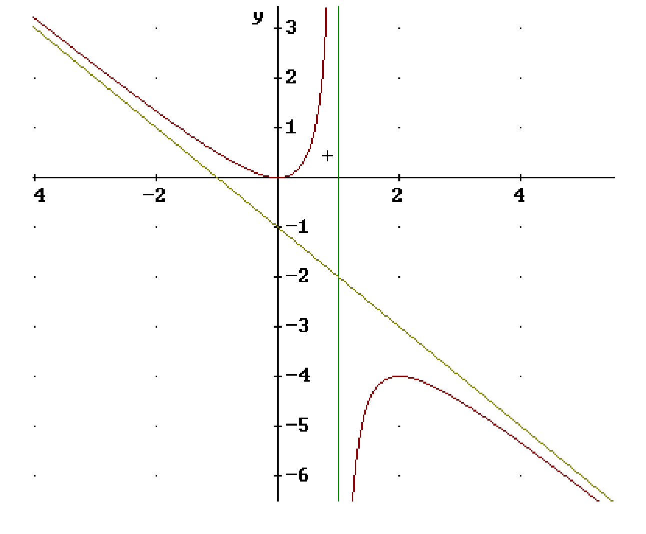

Figura 2. Grafico del luogo γ'.

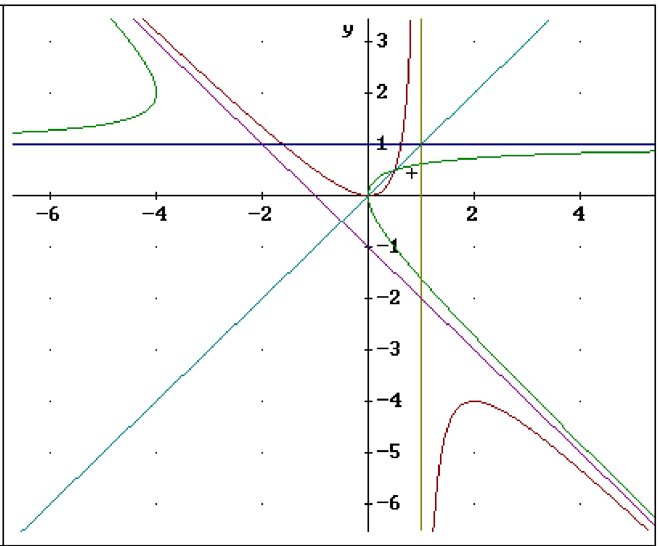

Figura 3. Grafico del luogo γ e di γ'.

Punto 4

Per determinare l'area richiesta, determiniamo i punti di intersezione tra le due curve tralasciando la condizione iniziale $x \neq 0$. Le due curve si incontrano oltre che nell'origine O anche nel punto $R\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Data la simmetria della regione limitata di piano di cui occorre trovare l'area rispetto alla retta $y = x$, l'area è data da:

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0{,}113706...$$

Per calcolare un valore approssimato di questa area si può ad esempi usare il metodo dei trapezi alla funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ nell'intervallo [0, ½] e poi sottrarre questa area da quella di un quadrato di lato 1/2.

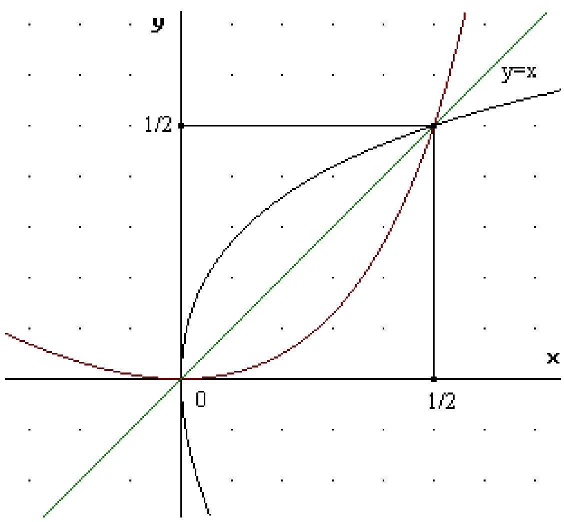

Figura 4. Grafico della regione compresa tra γ e γ'.

Con il metodo dei trapezi si ottiene un valore approssimato per eccesso dell'area del triangolo mistilineo OPR

$$Area(OPR) = h\left(f(a) + f(b) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1})\right)$$

Dividendo l'intervallo [0, ½] in cinque parti uguali, si ottiene:

$$Area(OPR) = \frac{1}{10}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{1}{10}\right) + 2f\left(\frac{2}{10}\right) + 2f\left(\frac{3}{10}\right) + 2f\left(\frac{4}{10}\right)\right).$$

$$Area(OPR) \approx \frac{89}{1260} = 0,070634...$$

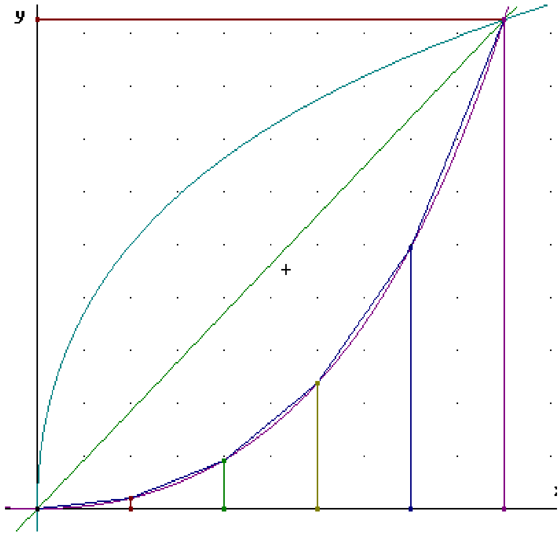

Figura 4. Metodo dei trapezi per determinare numericamente A.

Quindi l'area richiesta è approssimativamente:

$$A \approx \frac{1}{4} - 2Area(OPR) = \frac{137}{1260} = 0,108773...$$

Si tratta di un valore approssimato per difetto, perché l'area del triangolo mistilineo ORS è stata determinata per eccesso, essendo in $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ la funzione convessa.

Punto 5

Nel caso in cui $x = 1$, tornando al sistema iniziale si ottiene $\begin{cases} 1 + y = a \\ \dfrac{1}{y} = a \end{cases}$, che geometricamente per ogni valore di *a* rappresenta due rette parallele all'asse *x*. Tali rette coincidono se $1 + y = \frac{1}{y}$; si tratta di una celebre equazione, che si può anche scrivere nel seguente modo:

$$(1 + y) : 1 = 1 : y\,.$$

Le soluzioni sono: $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. In questo caso, quindi, il primo valore della *y* trovato è la *sezione aurea* di un segmento unitario; quindi, in tal caso, il rapporto tra il numero $x = 1$ e il numero *y* è il *rapporto aureo*: $\frac{x}{y} = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618...$. Il rapporto aureo è spesso indicato con la lettera greca φ.