ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002
Indirizzo sperimentale: P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002
Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESTIONARIO

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnanti sono n ?
2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Meré* (1610-1685), amico di *Blaise Pascal*: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi"?
3. Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.
4. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$$
5. Cosa si intende per "*funzione periodica*" ? Qual è il *periodo* di $f(x)=-sen\dfrac{\pi x}{3}$? Quale quello di $sen2x$?
6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n+px+q \quad (p,q\in\mathbb{R})$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.
7. Data la funzione
$$f(x)=e^x-senx-3x=0$$
calcolarne i limiti per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0<\alpha<1$ in cui la funzione si annulla.
8. Verificare che la funzione $3x+\log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.
9. Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$.
10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

Domanda 1
Dati due numeri positivi a e b, la loro media aritmetica è ovviamente:
$$m_a=\frac{a+b}{2}$$
e quella geometrica:

$$m_g = \sqrt{ab}\,.$$

Si ha:

$$m_a \geq m_g$$

e l'uguaglianza si ha se $a = b$.
La dimostrazione è facile perché la disuguaglianza:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

elevando al quadrato si riconduce a:

$$(a-b)^2 \geq 0\,.$$

La generalizzazione della definizione di media aritmetica è: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ e quella di media geometrica di n numeri positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

Domanda 2

Chiamiamo E_1 l'evento "uscita di almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado".
Conviene pensare all'evento contrario, che ha probabilità:

$$p\left(\overline{E_1}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}\,.$$

Quindi

$$p\left(E_1\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0.5177....$$

Nello stesso modo si procede per l'evento E_2 "uscita di un doppio 1 con 24 lanci di due dadi".
Conviene pensare all'evento contrario, che ha probabilità:

$$p\left(\overline{E_2}\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.508596....$$

Quindi

$$p\left(E_2\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914....$$

Si conclude, come aveva trovato Pascal, che è più probabile l'evento E_1.

Domanda 3

La probabilità che tutte le partite inserite nella schedina del totocalcio, eccettuata una, terminino in parità, è:

$$p\left(E\right) = 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{1594323} = 0{,}0000163...$$

Domanda 4

Per calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$$

si può usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$$

Domanda 5

Sia data una funzione $f(x)$ definita in un certo insieme $D\subset\mathbb{R}$ e un numero reale positivo T per cui si verifica la seguente proprietà: se $x\in D$, allora $x+T\in D$ e inoltre $f(x)=f(x+T)$ per ogni $x\in D$; allora la funzione si dice *periodica*. Il minimo valore reale positivo T per cui si verifica la proprietà detta viene chiamato *periodo* di $f(x)$.

Le due funzioni rientrano tra quelle armoniche del tipo $f(x)=a\sin\omega x$, che hanno per periodo:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Quindi il periodo delle funzioni date è $T_1=6$ e $T_2=\pi$.

Domanda 6

La funzione data:

$$f(x)=x^n+px+q.$$

è ovviamente continua e derivabile ovunque; la derivata prima è: $f'(x)=nx^{n-1}+p$. $f'(x)$ si annulletà al più una volta se n è pari e si annullerà al più due volte se n è dispari. Quindi:

- Se n è pari, esistono al massimo due zeri per la $f(x)$;
- Se n è dispari, esistono al massimo tre zeri per la $f(x)$.

Domanda 7

La funzione

$$f(x)=e^x-senx-3x$$

contine un termine "oscillante" e per calcolare il limite non possiamo usare il teorema della somma dei limiti. Sia per $+\infty$ che per $-\infty$ conviene dunque scivere nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x-senx-3x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{senx}{x}-3\right)\right]=+\infty.$$

La conclusione si ricava dall'analisi dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad \text{e da} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Il primo limite si calcola usando la regola di De L'Hospital mentre il secondo richiede un'analisi più attenta. Si osserva che vale la seguente relazione $-\frac{1}{x}\le\frac{senx}{x}\le\frac{1}{x}$ e si applica il Teorema del confronto. Analoga discussione per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^x-senx-3x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{senx}{x}-3\right)\right]=+\infty$$

La funzione ammette una ed una sola radice positiva compresa tra 0 e 1. Per dimostrarlo basta osservare che la funzione data è continua su R. Si ha inoltre:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=e-\sin 1-3 \end{cases}$$

Quindi per il “teorema degli zeri delle funzioni continue” c’è una radice nell’intervallo [0, 1]. Applicando uno dei metodi approssimati, ad esempio il metodo delle tangenti di Newton, si trova la radice approssimata:

$$\alpha = 0,36...$$

Domanda 8

La funzione è definita per x>0. Si ha:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

che è positiva nell’ipotersi x >0. Quindi la funzione è crescente (in senso stretto) e dunque è invertibile (nel suo campo di esistenza).

Si ha, nell’ipotesi in cui $y_0 = f\left(x_0\right)$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}.$$

Quindi $g'(3) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}$, con $f\left(x_0\right) = 3$. Dobbiamo trovare x_0; dobbiamo dunque risolvere l’equazione $3x + \ln x = 3$, ovvero $\ln x = 3 - 3x$. Si trova subito che x_0=1. Quindi:

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

Domanda 9

Poniamo (funzione integrale):

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha quindi

$$F'(x) = f\left(x\right) = \cos\pi x - \pi x \sin\pi x.$$

Quindi:

$$f\left(4\right) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1.$$

Domanda 10

Si rinvia ad un buon libro di geometria.