ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di ***versiera di Agnesi*** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:
$$OD : DB = OA : DP$$
$$OC : DP = DP : BC$$
ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$;
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

Punto 1

I triangoli rettangoli OBD e OAC sono simili perché hanno un angolo in comune (l'angolo $A\hat{O}B$).
Possiamo quindi scrivere la proporzione:
$$OD : DB = OA : DP .$$
Poiché inoltre DP è isometrico a AC, segue
$$OD : DB = OA : AC .$$

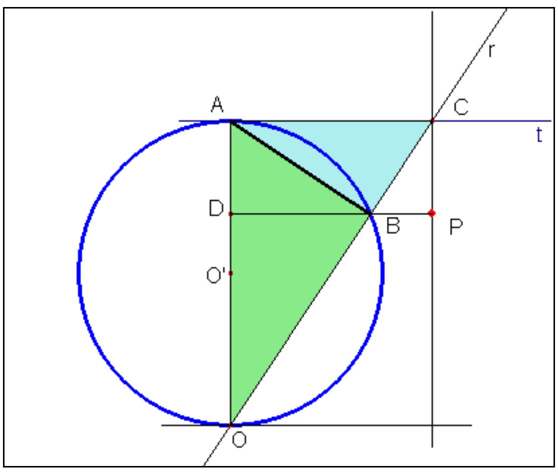

Figura 1

Per dimostrare che $OC : DP = DP : BC$, basta osservare che AB è perpendicolare a OC perché OBA è un triangolo inscritto in una semicirconferenza in cui OA è il diametro. La proporzione segue quindi dalla similitudine tra i triangoli rettangoli OAC e ABC.

Punto 2

Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico *Oxy*, con l'asse *y* che ha origine nel punto O, verso dato da OA, e l'asse *x* tangente nel punto O alla circonferenza data, si ottiene la figura 2. Il punto A ha coordinate (0, *a*), con *a*>0. Il punto P(*x, y*) descrive un luogo geometrico noto come *versiera* di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). È una curva algebrica di terzo grado, come si può verificare con il calcolo della sua equazione.

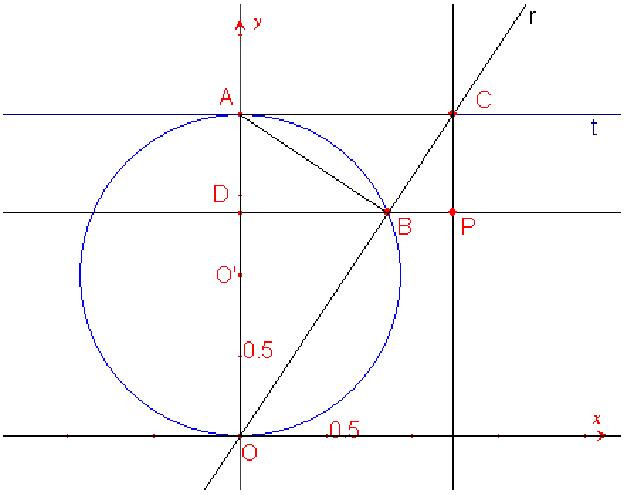

Figura 2

Le coordinate del punto B sono date dal sistema formato da una retta passante per l'origine degli assi intersecata con la circonferenza:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - ay = 0 \end{cases}.$$

Le coordinate del punto C sono date dal sistema formato dalla tangente *t* alla circonferenza nel punto A e dalla retta *r* passante per l'origine degli assi:

$$\begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases}$$

Risolvendo i due sistemi e tenendo conto che il punto P ha l'ascissa del punto C e l'ordinata del punto B, si ottengono le equazioni parametriche del punto P:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Il punto A deve essere esaminato a parte: si ottiene quando la retta passante per O coincide con l'asse *y*. Eliminando il parametro *m* tra le due equazioni si ricava l'equazione cartesiana del luogo Γ:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Punto 3

Si tratta di una funzione pari, definita e positiva su tutto l'asse reale che si può studiare facilmente. Si trova subito, quasi senza calcolare limiti, che la funzione ha per asintoto l'asse delle *x*. Anche il punto di massimo lo si può trovare senza derivate e si ha per $x = 0$ dove la funzione vale *a*. La derivata prima della funzione è :

$$f'(x) = -\frac{2a^3 x}{\left(x^2 + a^2\right)^2},$$

il cui segno è di facile analisi (tuttavia, non c'era bisogno della derivata prima per stabilire il punto di massimo della funzione). Dallo studio del segno segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2a^3\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

si ricava che i flessi sono nei punti $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$. Il grafico di Γ è riportato nella figura 3, dove per comodità del disegno si è posto $a = 2$.

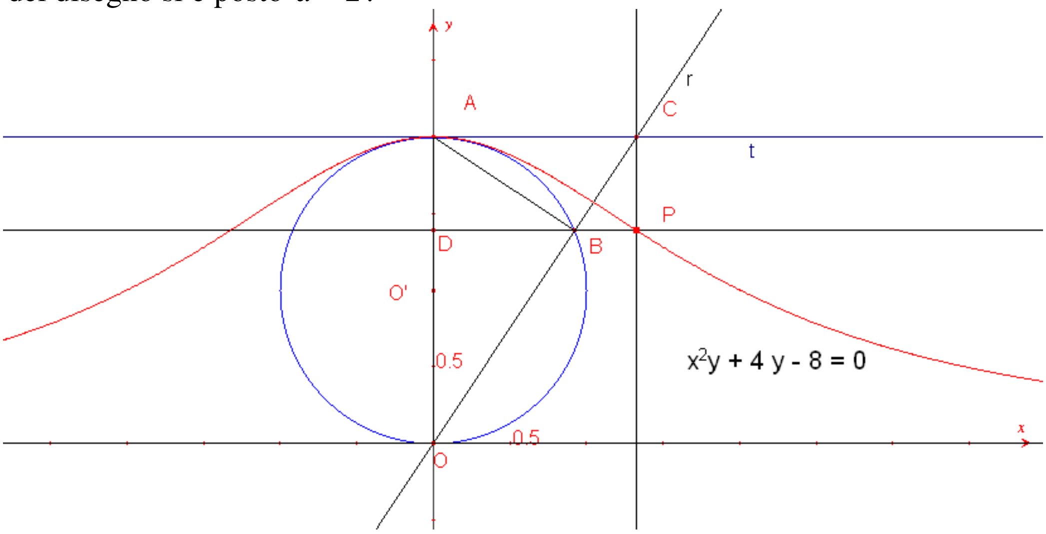

Figura 3

Per determinare l'area tra la curva Γ e il suo asintoto (asse *x*), si deve calcolare il seguente integrale improprio:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2}\,dx.$$

Tenendo conto che la funzione è pari, si ha:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2}\,dx = 2a^3 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = 2a^2 \cdot \lim_{b \to +\infty} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = \pi a^2$$

Tale valore è quindi il quadruplo dell'area del cerchio di diametro OA (figura 4).

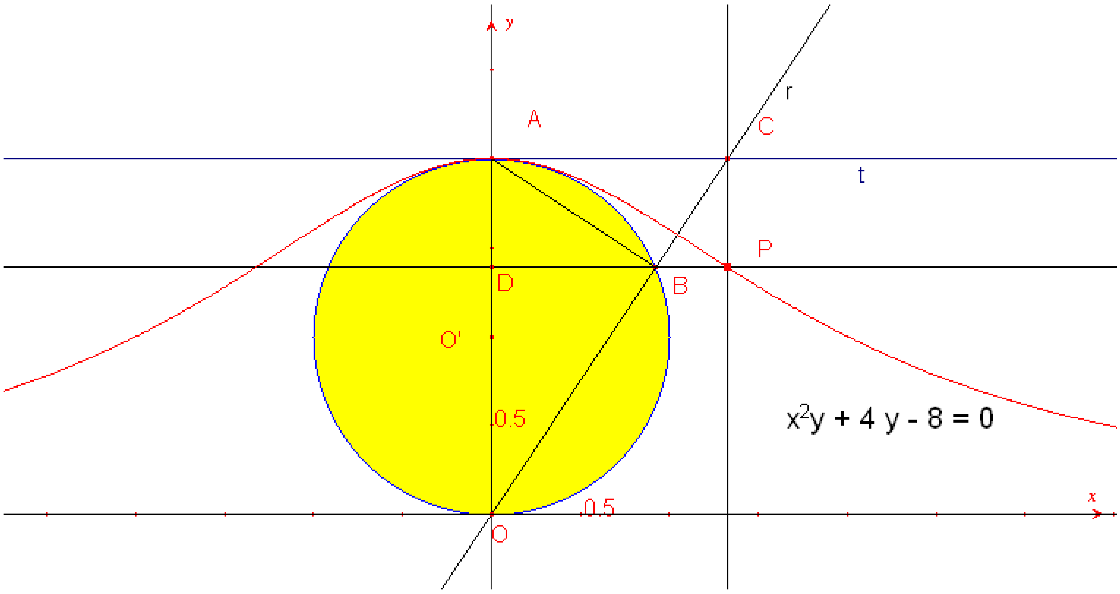

Figura 4