# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

**RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2**

***PROBLEMA 2***

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con $a,b,c$ numeri reali. Si determinino $a,b,c$ in modo che:
1. la funzione $f$ sia pari;
2. *f(0)=2;*
3. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{2\log 2}$.

Si studi la funzione $g$ ottenuta sostituendo ad $a,b,c$ i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.
Si consideri la retta r di equazione $y=4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.
Si calcoli $\int \dfrac{1}{g(x)} dx$.
Si determini la funzione $g'$ il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

**Punto 1**
Sia $f(x) = a\cdot 2^x + b\cdot 2^{-x} + c$ con *a, b, c* numeri reali. Si determinino *a, b, c* in modo che :
1. la funzione $f$ sia pari;
2. $f(0) = 2$;
3. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{2\log 2}$.

La condizione che $f$ sia pari, cioè $f(x) = f(-x)$, implica che
$$a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c$$
da cui si ottiene:
$$(a-b)\left(2^x - 2^{-x}\right) = 0$$
e quindi:
$$a = b.$$
La seconda condizione, tenuto anche conto della prima, implica l'uguaglianza:
$$2a + c = 2,$$
ovvero
$$c = 2(1-a).$$
La terza condizione
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2\log 2}$$
diventa

$$\int_0^1 \left(a2^x + a2^{-x} + c\right) dx = \frac{3}{2\log 2}.$$

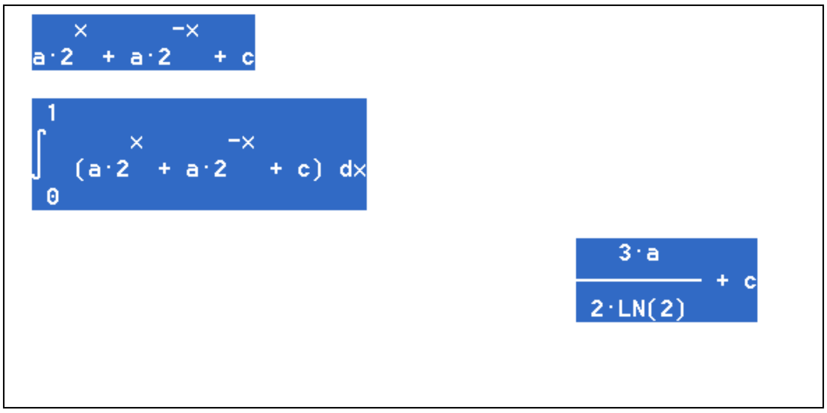


Figura 1. *Calcolo dell’integrale con DERIVE*

Calcolando l’integrale si ottiene pertanto l’equazione:

$$\frac{3a}{2\log 2} + c = \frac{3}{2\log 2}.$$

Tenendo conto della seconda condizione si ha:

$$(a-1)\left(\frac{3}{2\log 2} - 2\right) = 0,$$

da cui si ricava:

$$a = 1.$$

In definitiva, quindi, $a = b = 1$ e $c = 0$.

**Punto 2**

Pertanto la funzione richiesta ha per espressione:

$$g(x) = 2^x + 2^{-x}.$$

Si tratta di una funzione definita su tutto l’asse reale, continua e derivabile ovunque. È una curva *catenaria* (perché rappresenta la forma di una catena appesa ai suoi due estremi in due punti alla medesima altezza) che si può esprimere, a meno di un fattore 2, come un *coseno iperbolico*:

$$g(x) = 2^x + 2^{-x} = e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2} = 2\left(\frac{e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2}}{2}\right) = 2\cdot\cosh\left(x\ln 2\right)$$

Il suo grafico G è riportato nella figura 2.

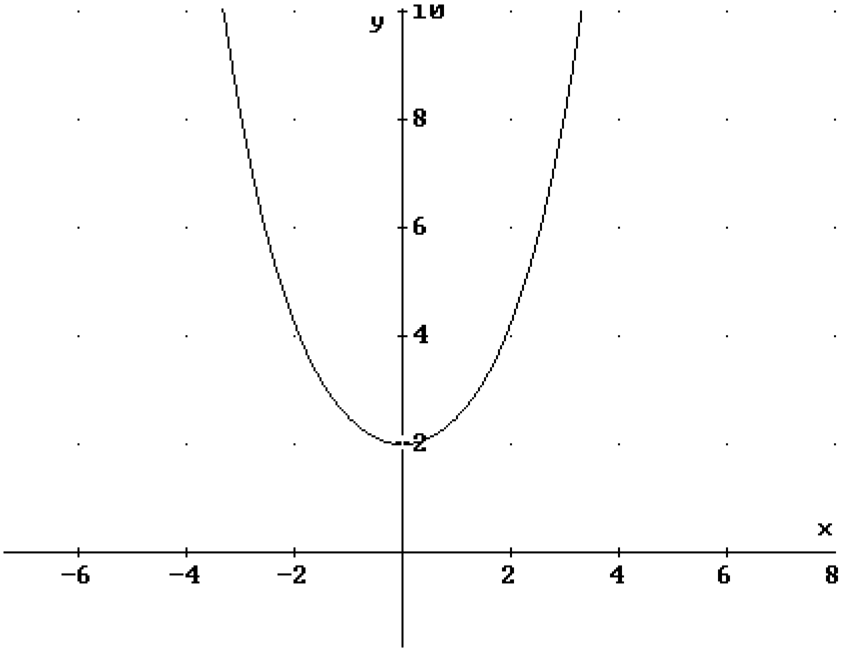


Figura 2

Studiando il segno della derivata prima:

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \ln 2\left(2^x - 2^{-x}\right) = \ln 2 \cdot \sinh(x \ln 2),$$

si trova che il minimo è nel punto $x = 0$ e vale 2. La derivata seconda è:

$$g''(x) = (\ln 2)^2 \left(2^x + 2^{-x}\right) = (\ln 2)^2 \cdot \cosh\left(x \ln 2\right)$$

e quindi è positiva per ogni $x \in R$. Pertanto la funzione è convessa sui reali (come ci si doveva aspettare, essendo una catenaria).

**Punto 3**

Si considera la retta *r* di equazione *y* = 4 e si determinano, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca la curva G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si ottiene l'equazione:

$$2^x + 2^{-x} = 4$$

ovvero

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Risolvendo l'equazione rispetto a $t = 2^x$, si ottengono le soluzioni (tra loro reciproche):

$$t = 2^x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Quindi:

$$x = \log_2\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Usando un metodo approssimato, ad esempio il metodo di bisezione, si ricavano i valori:
$x \approx \pm 1.899968626...$.

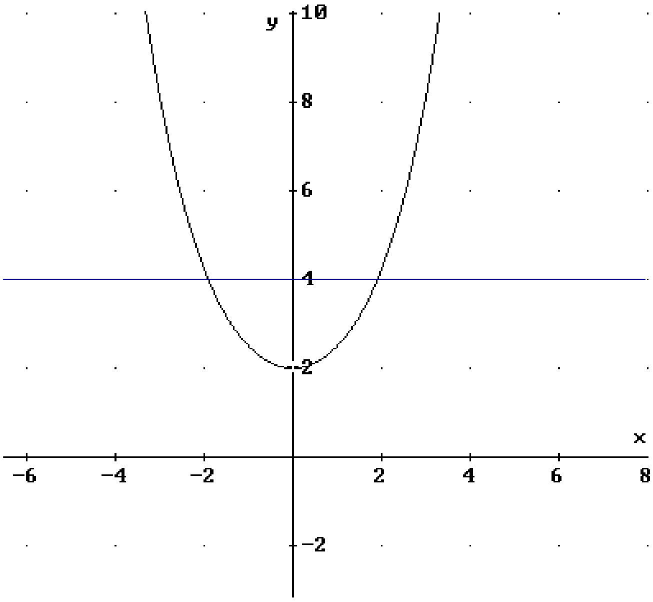


Figura 3

**Punto 4**
Per determinare l'area della regione finita del piano racchiusa tra $r$ e G, si deve determinare il seguente integrale:

$$S = \int_{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} \left(4-2^x-2^{-x}\right)dx\,.$$

Ricordando che la curva G e la retta $r$ sono funzioni pari, si può scrivere:

$$S = 2\cdot\int_{0}^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} \left(4-2^x-2^{-x}\right)dx = 8\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\ln 2}-\frac{4\sqrt{3}}{\ln 2}$$

che fornisce il valore approssimato:

$$S \approx 5{,}204464573\ldots.$$

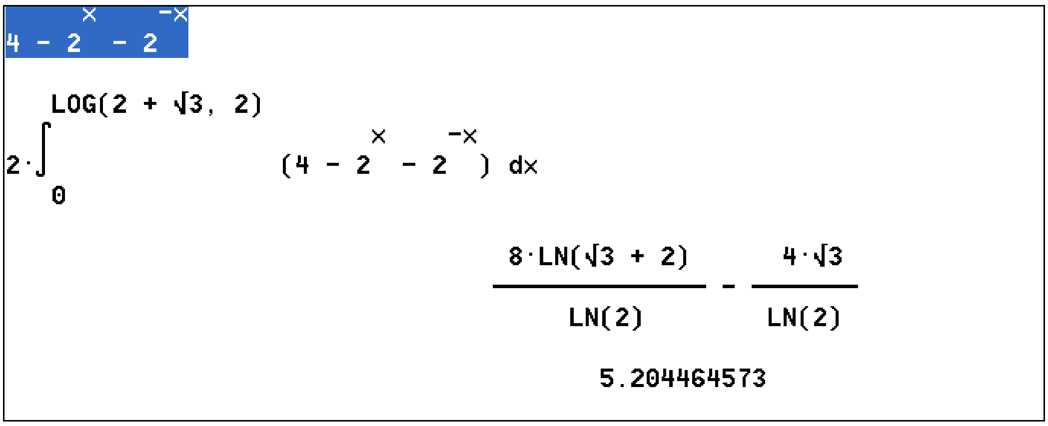


Figura 4

**Punto 5**
Si calcoli $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}dx$.

Si ottiene:

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{2^x}{2^{2x}+1}dx\,.$$

Si può procedere per sostituzione, ponendo $t = 2^x$, che implica $x = \log_2 t$, ovvero $dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}\cdot dt$.

Sostituendo si ottiene:

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\int \frac{1}{1+t^2}dt\right)_{t=2^x} = \frac{1}{\ln 2}\arctan\left(2^x\right)+c\,.$$

**Punto 6**

La simmetria assiale di asse la retta $y = 4$, ha per equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$. Queste equazioni si ricavano osservando che il punto medio tra due punti corrispondenti P($x$, $y$) e P'($x'$, $y'$) deve stare sulla retta $y$ = 4. Quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = x \\ \dfrac{y+y'}{2} = 4 \end{cases}$$

da cui si ricavano le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $y$ = 4.
Si ottiene la funzione $g_1(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$, che ha il grafico indicato nella figura 5.

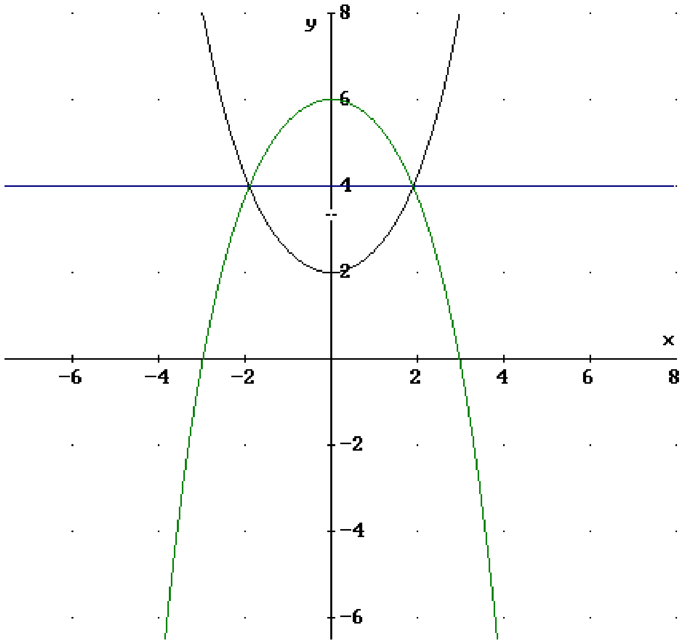


Figura 5