ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Punto a)

Per esaminare il dominio di derivabilità distinguiamo due casi.

1) Se $m > 0$, la funzione diventa

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m}$$

che ha per dominio l'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

La derivata prima in questo caso è

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2m)-(2x+1)2x}{(x^2+2m)^2} = \frac{2(2m-x-x^2)}{(x^2+2m)^2}$$

che ha per dominio l'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

2) Se $m \leq 0$, la funzione diventa

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$$

che ha per dominio l'insieme dei reali $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e il parametro m non compare.

La derivata prima in questo caso è

$$f'(x) = \frac{2(x^2)-(2x+1)2x}{(x^2)^2} = -\frac{2(x+x^2)}{x^4} = -\frac{2(1+x)}{x^3}$$

che ha per dominio l'insieme dei reali non nulli $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Punto b)

In questo caso nella funzione deve rimanere il parametro; quindi deve essere $m > 0$.

La derivata prima in questo caso è

$$f'(x) = \frac{2(2m - x - x^2)}{(x^2 + 2m)^2}$$

che ha per dominio l'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Poiché deve essere $f'(1) = 0$, si ottiene l'equazione

$$\frac{2(2m - 2)}{(1 + 2m)^2} = 0$$

da cui si ricava $m = 1$.

Punto c)

Per $m = 1$, la funzione è pertanto

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

con derivata prima

$$f'(x) = \frac{2(2 - x - x^2)}{(x^2 + 2)^2}.$$

La funzione ha come asintoto orizzontale l'asse della *x*, come si intuisce facilmente, perché il denominatore è una funzione polinomiale di secondo grado mentre il numeratore è di 1° grado.

Per ipotesi, il punto di ascissa $x = 1$ è un punto in cui si annulla la derivata prima. L'altro punto in cui si annulla a derivata prima è $x = -2$. Ne segue che la derivata prima è positiva nell'intervallo $-2 < x < 1$. Pertanto la funzione ha un massimo relativo (che è anche assoluto) nel punto $x = 1$ (che vale $y = 1$) e un punto di minimo relativo (che è anche assoluto) per $x = -2$ (che vale $y = -\frac{1}{2}$. Si ottiene il seguente grafico.

La derivata seconda della funzione è data da

$$f''(x) = \frac{2(2x^3 + 3x^2 - 12x - 2)}{(x^2 + 2)^3}.$$

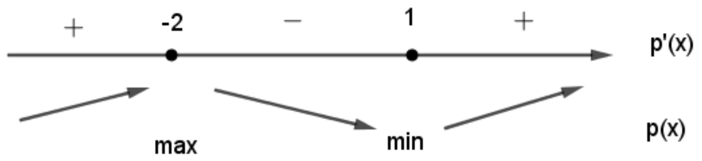
Il segno di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal segno della funzione polinomiale al numeratore

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2$$

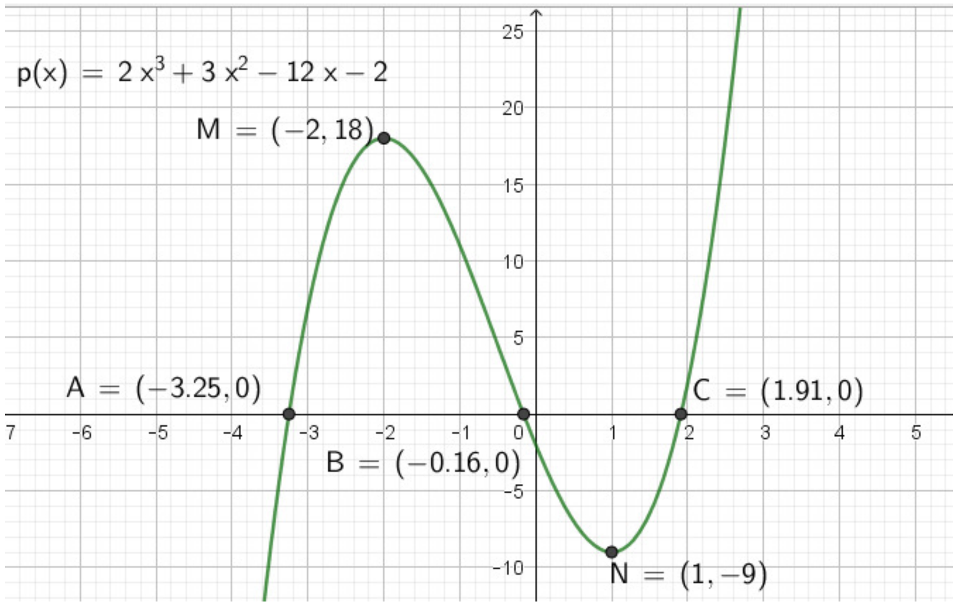
che è una cubica ed ha per derivata prima

$$p'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

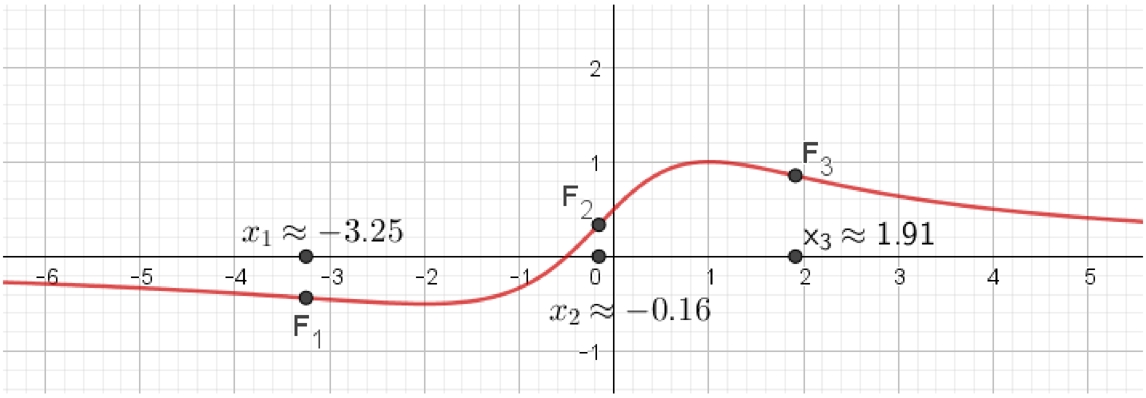
che ha per radici -2, 1, con $p(-2) = 18$ e $p(1) = -9$. Dal segno di $p'(x)$ si ricava il seguente schema dell'andamento di $p(x)$.



Quindi $x = -2$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo per $p(x)$.
Inoltre il limite di $p(x)$, per $x \longrightarrow +\infty$ $(-\infty)$ è $+\infty$ $(-\infty)$.
Quindi $p(x)$ ha tre radici, che sono le ascisse dei flessi della funzione $f(x)$. Il grafico di $p(x)$ è il seguente.

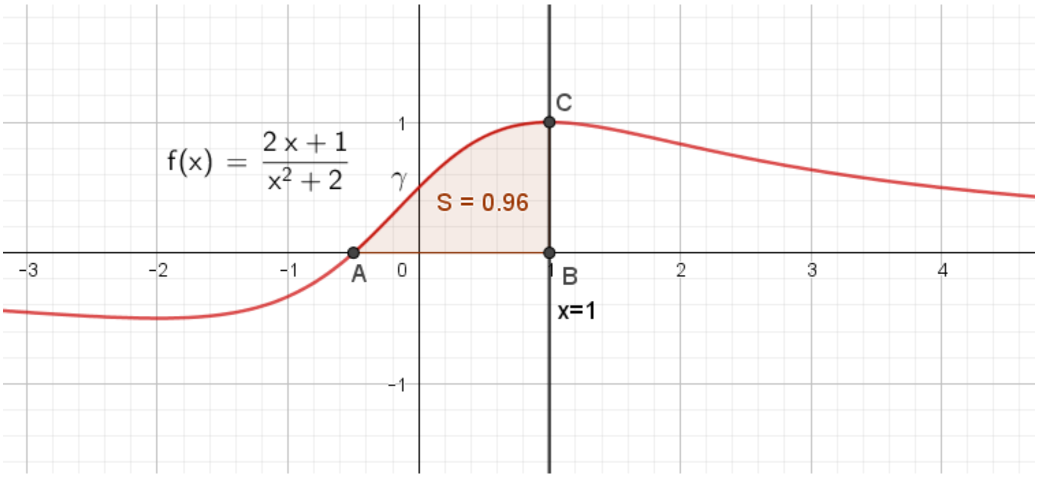


Le ascisse approssimate dei flessi sono pertanto -3,25, -0,16, 1,91. Il grafico della funzione con l'indicazione dei flessi, è il seguente.



Punto d)
L’area richiesta è data dal seguente integrale definito:

$$S = \int_{-1/2}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx\,.$$



Calcoliamo dapprima l’integrale indefinito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c\,.$$

Pertanto l’area è data da:

$$S = \int_{-1/2}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx = \left[\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1/2}^{1} =$$

$$\ln(3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx 0.963.$$