ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2003-2004
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Punto 1

La curva γ è il grafico di una funzione definita sull'insieme R (insieme dei numeri reali), pari, derivabile e continua. Ovviamente $f(x)$ è sempre positiva per ogni x appartenente al dominio. Il suo grafico è una curva "a campana", come si ricava facilmente studiandone i limiti, la derivata prima e la derivata seconda.

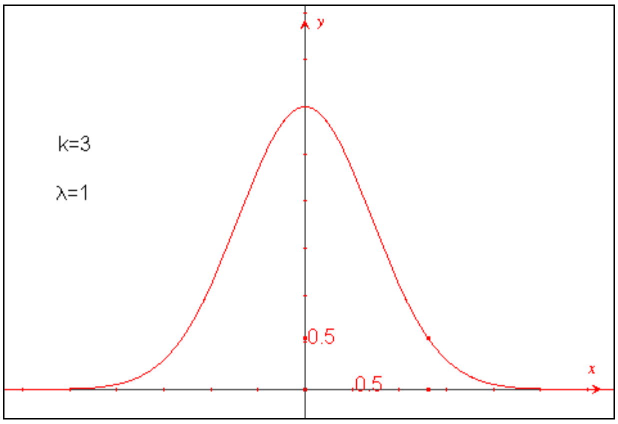

figura 1

Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, l'asse delle ascisse è l'asintoto orizzontale della funzione.

Si ha inoltre:

$$f'(x) = -2k\lambda x \cdot e^{-\lambda x^2}$$

Quindi, come previsto, $x = 0$ è il punto di massimo della funzione e il massimo vale $f(0) = k$.

La derivata seconda vale $f''(x) = -2k\lambda\left(e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x^2 \cdot e^{-\lambda x^2}\right) = 2k\lambda \cdot e^{-\lambda x^2}\left(2\lambda x^2 - 1\right)$.

Poiché per ipotesi i parametri k e λ sono positivi, i punti di flesso sono pertanto $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

I parametro k fa pertanto cambiare il valore del massimo (figura 2) della funzione mentre il valore di λ fa variare il flesso rendendo la curva più o meno "allargata" attorno al suo asse di simmetria (asse y). Al crescere del parametro positivo λ, i flessi della curva si avvicinano all'asse delle y (figura 3).

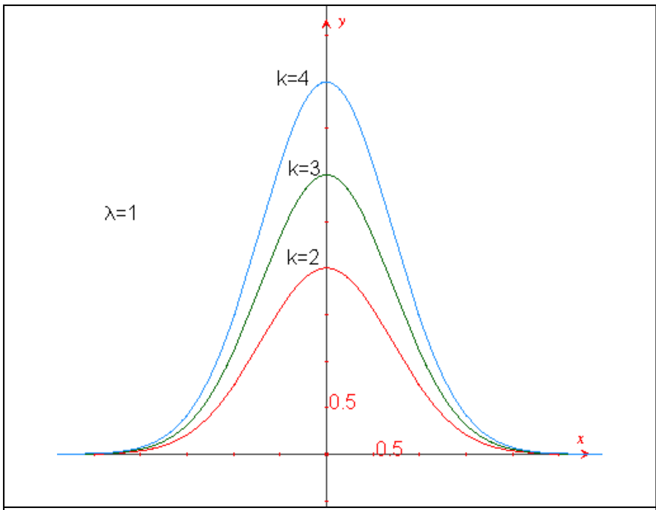

Figura 2

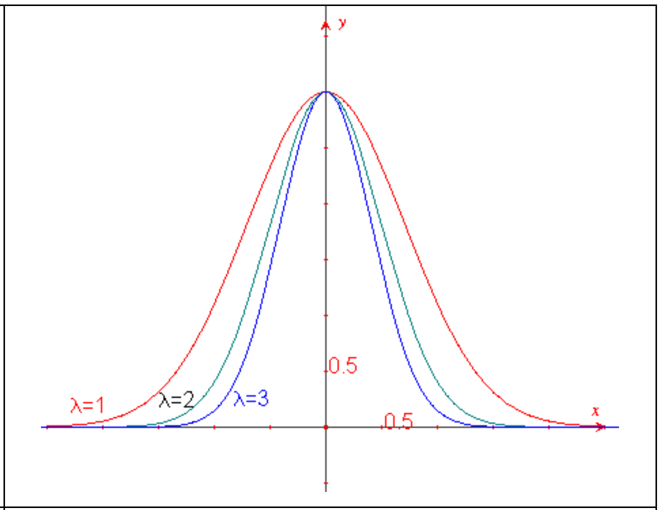

Figura 3

Punto 2

Per determinare il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ, osserviamo la figura 4.

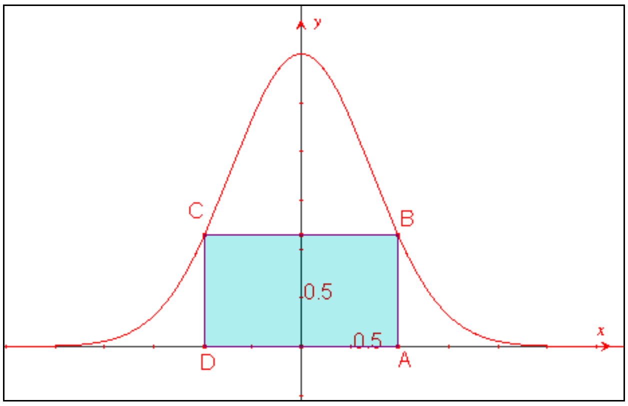

Figura 4

Fissato $x \geq 0$, il punto A ha coordinate $(x, 0)$ e il punto B ha coordinate $(x, ke^{-\lambda x^2})$. L'area del rettangolo è pertanto:

$$S(x) = Area(ABCD) = 2x \cdot ke^{-\lambda x^2} = 2k \cdot xe^{-\lambda x^2}.$$

La derivata prima della funzione $S(x)$ è:

$$S'(x) = 2k \cdot e^{-\lambda x^2}\left(1 - 2\lambda x^2\right).$$

L'area del rettangolo è quindi massima per $x = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, ovvero quando il punto B (figura 4) coincide con il punto di flesso appartenente al primo quadrante.

Punto 3

Se poniamo $\lambda = \dfrac{1}{2}$, otteniamo la funzione: $f(x) = k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Poiché deve essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

posto $t^2 = \frac{x^2}{2}$, si ha $dx = \sqrt{2} \cdot dt$ e quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

da cui, tenendo conto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ segue

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Otteniamo quindi l'espressione della curva *normale* di Gauss:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

che è un caso particolare della curva di equazione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con i parametri $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Punto 4

Se nella funzione di Gauss appena ottenuta poniamo $\mu \neq 0$ e $\sigma \neq 1$ ($\sigma > 0$), si ottiene la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Per ottenere questa espressione occorre prima fare un cambiamento di variabile nella funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, sostituendo alla variabile *x* l'espressione $x \leftarrow \frac{x-\mu}{\sigma}$. Questo cambiamento di variabile, tuttavia, modifica la funzione nel seguente modo:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L'area che sta tra la curva e l'asse delle *x* diventa ora σ, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$$

Dividendo per σ, si ottiene infine la funzione $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Le più importanti proprietà della curva di equazione $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ sono:

- La retta di equazione $x = \mu$ è l'asse di simmetria della curva.
- Il massimo della curva si ha in $x = \mu$ e vale $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

- I flessi della curva sono nei punti di ascissa $x = \mu \pm \sigma$.
- L'area della regione compresa tra la curva e l'asse delle ascisse vale 1.

Il parametro μ (media aritmetica) determina una traslazione della gaussiana (nel verso positivo delle ascisse se $\mu > 0$; nel verso opposto se $\mu < 0$).

Il parametro σ (scarto quadratico medio) determina una curva gaussiana più o meno "allargata".

Per un'analisi completa delle proprietà della curva gaussiana si rinvia a un buon libro di statistica e probabilità.