ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

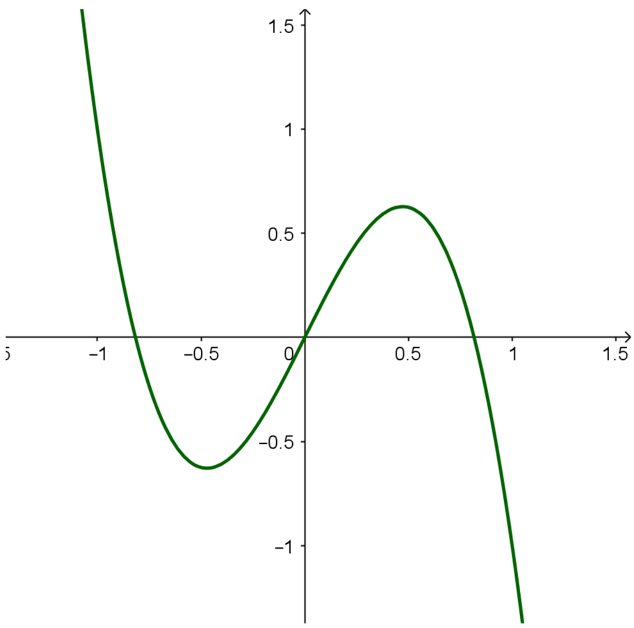
Sia *f* la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico *G* di *f*.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca *G* in due punti distinti e le regioni finite di piano *R* e *S* che essa delimita con G. Precisamente: *R* delimitata dall'asse y, da *G* e dalla retta $y = c$ e *S* delimitata da *G* e dalla retta $y = c$.
3. Determinate *c* in modo che *R* e *S* siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di *G* con la retta $y = c$;
4. determinate la funzione *g* il cui grafico è simmetrico di *G* rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$

Punto 1

La funzione *f* è una cubica dispari, che interseca l'asse delle *x* nei punti di coordinate $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, oltre che nell'origine degli assi (centro di simmetria del grafico). $f(x)$ è positiva nell'intervallo $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ e per $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$. La derivata prima è $f'(x) = 2 - 9x^2$.

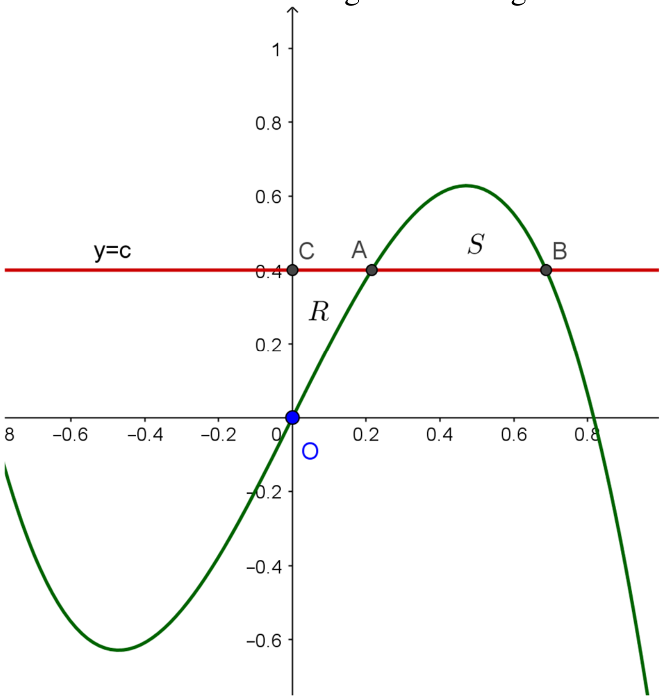
I punti di minimo e di massimo relativo sono rispettivamente $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$. In quest'ultimo punto la funzione vale $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{2}$. Il punto di flesso (discendente) è ovviamente l'origine degli assi.



Punto 2

Disegniamo una retta di equazione $y = c$ con $0 < c < \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Occorre che l'area della regione *R* sia uguale all'area della regione *S*.



Punto 3

Chiamiamo α l'ascissa del punto A e β l'ascissa del punto B e imponiamo che l'area della regione *R* sia uguale all'area della regione *S*.

Si ottiene

$$\int_0^\alpha \left(c - f(x)\right) dx = \int_\alpha^\beta \left(f(x) - c\right) dx$$

ovvero

$$c\beta = \int_0^\beta f(x)\, dx$$

che fornisce $c = \beta - \frac{3}{4}\beta^2$.

Poiché deve essere $f(\beta) = c$, si ha anche $2\beta - 3\beta^3 = c$.

Pertanto

$$\beta - \frac{3}{4}\beta^2 = 2\beta - 3\beta^3,$$

da cui segue, scartando la soluzione $\beta = 0$, $\beta^2 = \frac{4}{9}$, che fornisce l'unica soluzione accettabile

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Ne segue $c = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}$.

Sappiamo inoltre che $f(\alpha) = c$.

Quindi si ha: $2x-3x^3=\frac{4}{9}$, ovvero l'equazione

$27x^3-18x+4=0$.

Poiché sappiamo che $x=\frac{2}{3}$ è una soluzione di questa equazione, riducendo di grado si ha

$27x^2+18x-6=0$, che fornisce $9x^2+6x-2=0$: e soluzioni $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$, con accettabile

$x=\frac{\sqrt{3}-1}{3}=\alpha$.

Punto 4

La simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y=\frac{4}{9}$ si ottiene tramite le seguenti sostituzioni

$$\begin{cases} x \leftarrow x \\ y \leftarrow 2\cdot\frac{4}{9}-y \end{cases}$$

Si ottiene pertanto:

$2\cdot\frac{4}{9}-y=2x-3x^3$.

Pertanto si ottiene:

$y=3x^3-2x+\frac{8}{9}$.