ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC*.

1. Dimostrate che la mediana relativa a *BC* è congruente alla metà di *BC*.
2. Esprimete le misure dei cateti di *ABC* in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}\ metri$, determinate il cono ***K*** di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di ***K***.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono ***K***.

Risoluzione

Sia *ABC* un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC* (figura 1) e sia *O* il punto medio dell'ipotenusa.

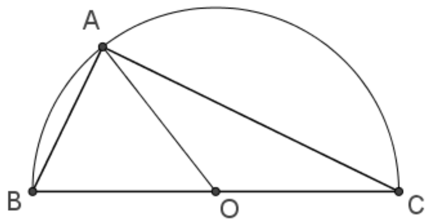

figura 1

1) Sappiamo che *O* è il centro della circonferenza circoscritta ad *ABC*. Pertanto la mediana relativa all'ipotenusa coincide con il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo. Si ha quindi: *AO*=*BO*=*CO*= metà dell'ipotenusa *BC*.

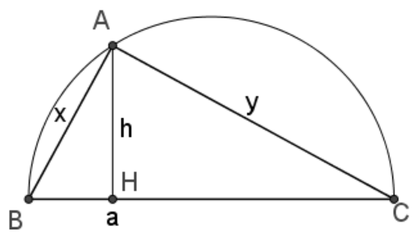

figura 2

2) Le misure dei cateti *x* e *y*, in funzione dell'ipotenusa *a* e dell'altezza *h* relativa all'ipotenusa (figura 2), sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} xy = ah \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = ah \\ (x+y)^2 - 2xy = a^2 \end{cases}$$

che si riduce al seguente sistema di 2° grado

$$\begin{cases} xy = ah \\ x + y = \sqrt{a^2 + 2ah} \end{cases}$$

La risolvente del sistema è data da

$$z^2 - \left(\sqrt{a^2 + 2ah}\right)\, z + ah = 0$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{a + 2h} \pm \sqrt{a - 2h}\right).$$

Pertanto

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{a + 2h} - \sqrt{a - 2h}\right)$$

e

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{a + 2h} + \sqrt{a - 2h}\right)$$

con $a \geq 2h$, ovvero $h \leq \frac{a}{2}$ (l'uguaglianza si ottiene per il triangolo rettangolo isoscele).

3) Se $BC = a = \sqrt{3}$ (apotema del cono), indichiamo con *x* la misura dell'altezza del cono (figura 3). Il raggio di base del cono sarà quindi

$$r = AB = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{con } 0 \leq x \leq a$$

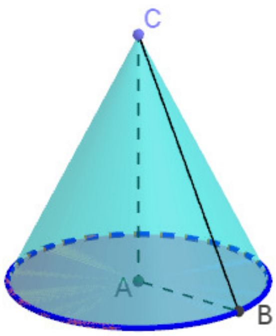

figura 3

Il volume del cono è dato da

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - x^2)x = \frac{1}{3}\pi(a^2x - x^3).$$

La derivata prima della funzione "volume" è data da

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - 3x^2)$$

con $0 \leq x \leq a$.

Il volume del cono è quindi massimo per $x = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$ (essendo $a = \sqrt{3}$).

Il raggio di base del cono *K* misura $r = \sqrt{2}$ e l'altezza misura 1 (figura 4).

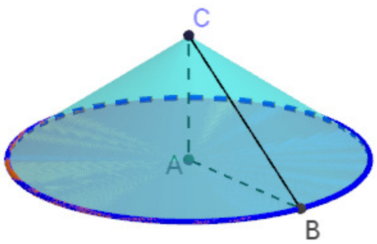

figura 4. Il cono *K*

Si ottiene un cono *K* di volume massimo (misurato in metri cubi, $1\ \mathrm{m}^3 = 1000\ \mathrm{L}$) dato da

$$V_{max} = V(1) = \frac{2}{3}\pi \approx 2094{,}4\ \mathrm{L}\,.$$

4) La superficie laterale del cono *K* di volume massimo (figura 5) è un settore circolare di area:

$$S_L = \pi r a = \pi\sqrt{2}\sqrt{3} = \pi\sqrt{6}.$$

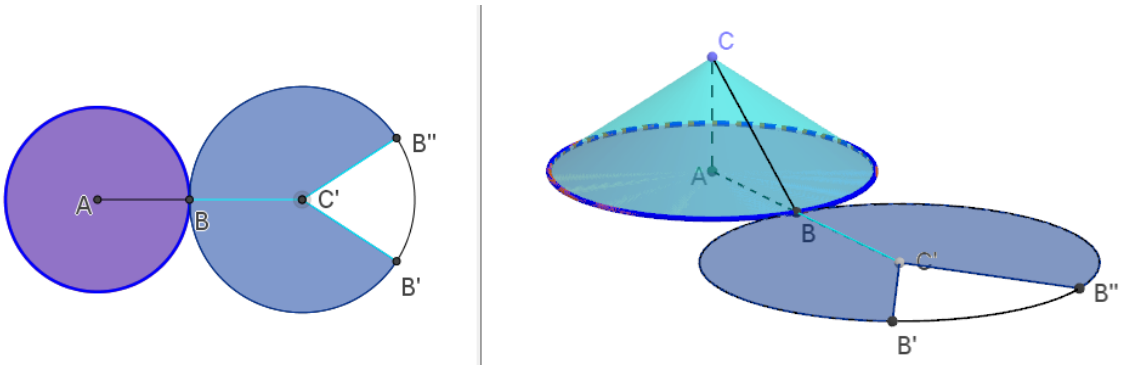

figura 5

Poiché l'area del settore circolare è data anche da

$$S_L = \frac{1}{2}a^2\theta = \frac{3\theta}{2}$$

si ottiene

$$\theta = \frac{2S_L}{3} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\ \mathrm{rad}$$

Pertanto l'angolo, espresso in gradi sessagesimali, è dato da

$$\alpha° = 120°\sqrt{6} = (293{,}929\ldots)° \approx 293°\ 56'\ 20''\ .$$